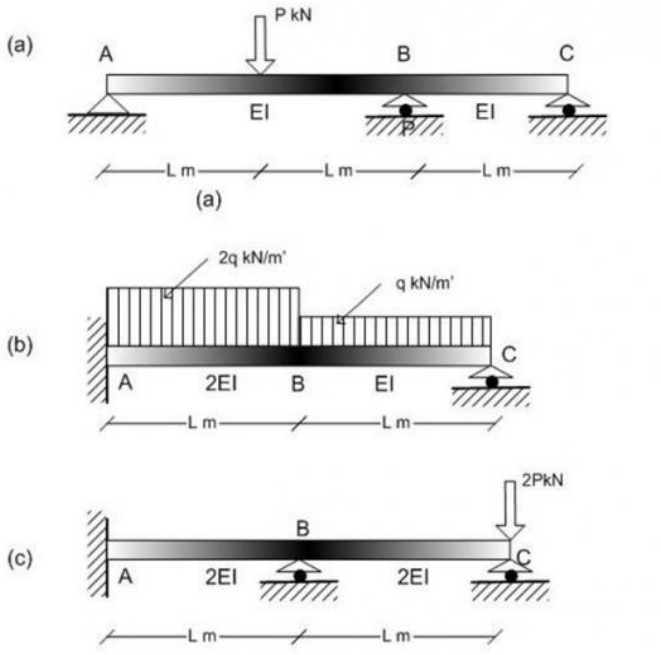
PENYELESAIAN STRUKTUR SRATIS TAK TENTU DENGAN METODE CONSISTENT DEFORMATION



2.1.1. Pendahuluan

Dalam bangunan Teknik Sipil, seperti gedung-gedung, jembatan dan lain sebagainya, ada beberapa macam system struktur, mulai dari yang sederhana sampai dengan yang sangat kompleks.

Pada mata kuliah Mekanika Teknik I, mahasiswa telah mempelajari system yang paling sederhana yaitu "struktur statis tertentu", dimana reaksi perletakan maupun gaya-gaya dalamnya (gaya lintang, gaya normal dan momen) pada struktur tersebut dapat dicari hanya dengan pertolongan persamaan keseimbangan. Adapun persamaan keseimbangan yang dimaksud ada 3 (tiga) keseimbangan yaitu :

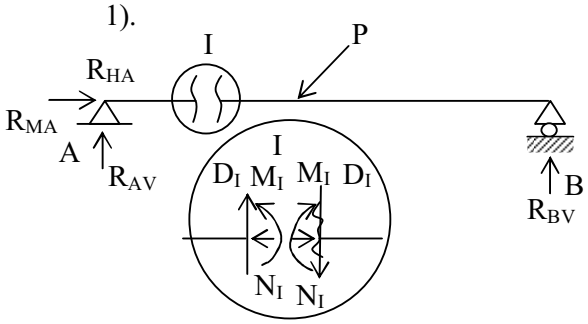
$\Sigma V = 0$ (jumlah gaya-gaya vertical sama dengan nol)

$\Sigma H = 0$ (jumlah gaya-gaya horizontal sama dengan nol)

$\Sigma M = 0$ (jumlah momen sama dengan nol)

Contoh struktur statis tertentu

1).



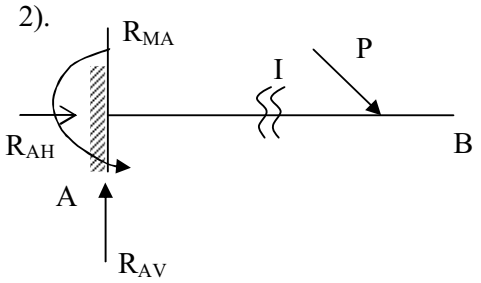
Gambar 2.1. Balok Diatas Dua Tumpuan

Balok diatas dua perletakan dengan beban P seperti pada Gambar 2.1.

A perletakan sendi mempunyai 2 reaksi perletakan R_{HA} dan R_{VA} yang tidak diketahui besarnya,B perletakan rol mempunyai sebuah reaksi perletakan R_{BV} yang tidak diketahui dibesarnya.

Jumlah reaksi perletakan yang tidak diketahui besarnya ada 3, maka dapat dicari dengan 3 persamaan keseimbangan. Sedangkan pada sebuah potongan struktur (I), ada tiga gaya dalam (N_I, D_I dan M_I) yang tidak diketahui besarnya, maka ketiga gaya dalam tersebut dapat dicari dengan 3 persamaan keseimbangan. Dengan demikian struktur diatas termasuk struktur statis tertentu.

2).



Balok kantilever dengan perletakan jepit di beban seperti pada Gambar 2.2.

- Jumlah reaksi perletakan ada 3 (R_{HA}, R_{VA}, R_{MA}).
- Jumlah gaya dalam potongan pada potongan ada 3 (N_I, D_I, M_I)

Gambar 2.2. Balok Kantilever

Masing-masing dapat diselesaikan dengan pertolongan 3 persamaan keseimbangan, maka struktur tersebut adalah struktur statis tertentu.

2.1.2. Definisi Struktur Statis Tidak Tertentu

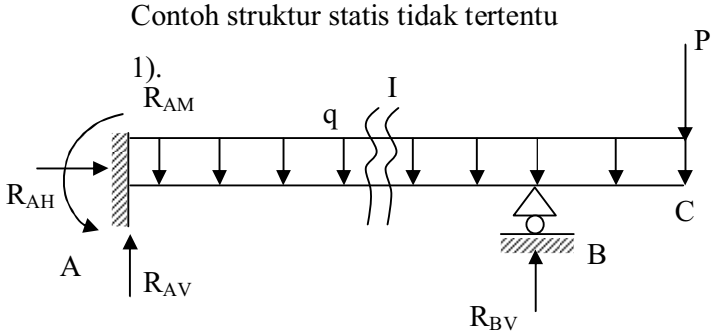
Suatu struktur disebut statis tidak tertentu jika tidak bisa diselesaikan dengan hanya pertolongan persamaan keseimbangan. Dalam syarat keseimbangan ada 3 (tiga) persamaan, apa bila sebuah struktur yang mempunyai reaksi

perletakan lebih dari 3 (tiga), maka reaksi-reaksi perletakan tersebut tidak bisa dihitung hanya dengan 3 persamaan keseimbangan. Struktur tersebut dikatakan struktur statis tidak tertentu.

Kelebihan bilangan yang tidak diketahui terhadap jumlah persamaan keseimbangan, disebut tingkat atau derajat ke "statis tidak tentuan" suatu struktur. Apabila yang kelebihan itu reaksi perletakan maka struktur disebut "statis tidak tertentu luar" sedangkan kalau yang kelebihan itu gaya dalam maka struktur disebut "statis tidak tentu dalam".

Contoh struktur statis tidak tertentu

1).



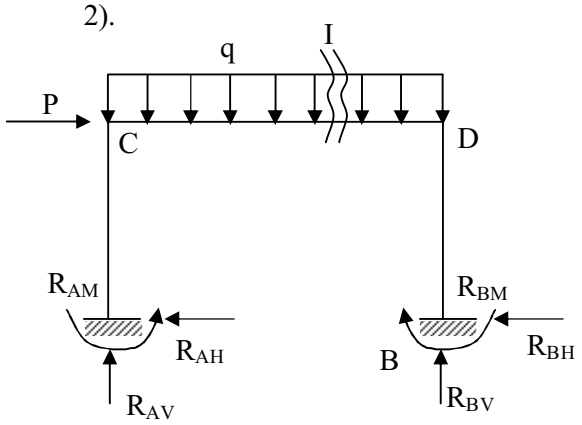
Balok diatas 2 perletakan dengan kantilever seperti pada Gambar 2.3.

A – Jepit ada 3 reaksi perletakan
B – Rol ada 1 reaksi perletakan

Gambar 2.3. Balok statis tidak tertentu

Jumlah reaksi perletakan ada 4, lebih besar dari 3 persamaan keseimbangan. Berarti bilangan yang tidak diketahui kelebihan satu dari jumlah persamaan keseimbangan. Sedangkan pada potongan ada 3 gaya dalam sama dengan jumlah persamaan keseimbangan. Dengan demikian struktur diatas disebut "statis tidak tertentu" tingkat 1 (luar).

2).



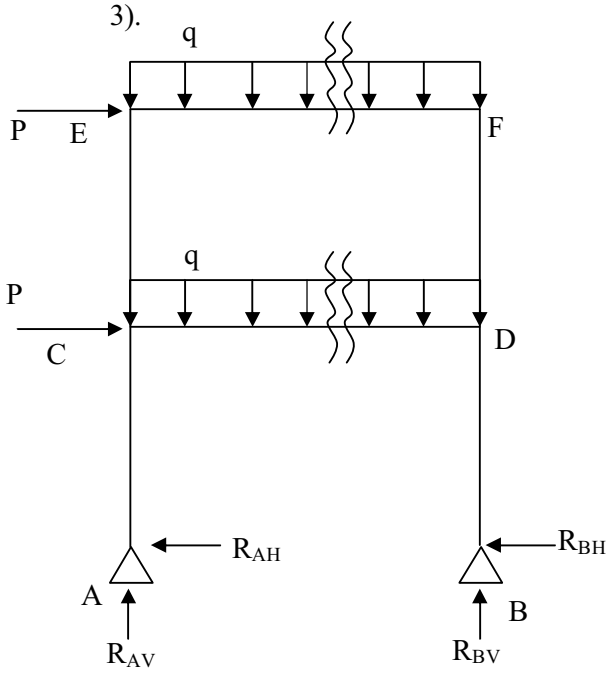
Portal dengan perletakan jepit dibebani seperti Gambar 2.4.

A-Jepit ada 3 reaksi perletakan
B-Jepit ada 3 reaksi perletakan
Jumlah R = 6 > 3 persamaan keseimbangan
Kelebihan 3 reaksi perletakan

Gambar 2.4. Portal statis tidak tertentu

Sedangkan pada potongan portal statis tidak tertentu ada 3 gaya dalam gambar dengan jumlah persamaan keseimbangan. Maka struktur dikatakan "statis tidak tertentu" tingkat 3 (luar).

3).



Gambar 2.5 Portal statis tidak tertentu

Portal dengan perletakan sendi dibebani seperti Gambar 2.5.

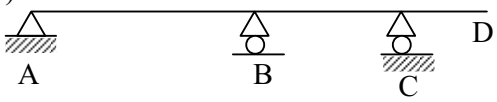
A-sendi ada 2 reaksi
B-sendi ada 2 reaksi

Jumlah reaksi R = 4 > 3
Kelebihan satu gaya luar.

Pada potongan ada 2 x 3 gaya dalam = 6 > 3.
Kelebihan tiga gaya dalam. Struktur dikatakan "statis tidak tertentu" tingkat 4 (satu luar, tiga dalam)

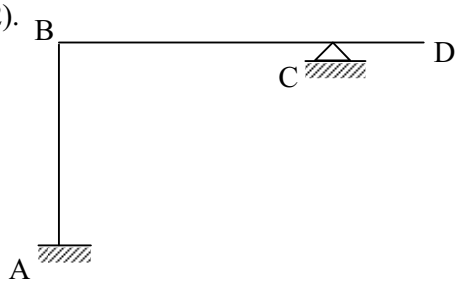
2.1.3. Soal Latihan

1).



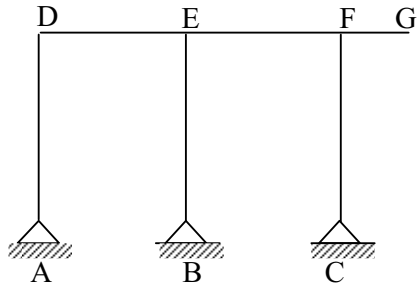
Suatu balok menerus dengan tiga perletakan dan kantilever seperti pada Gambar. Perletakan A adalah sendi, B dan C adalah rol.
Tentukan jenis struktur tersebut.

2).



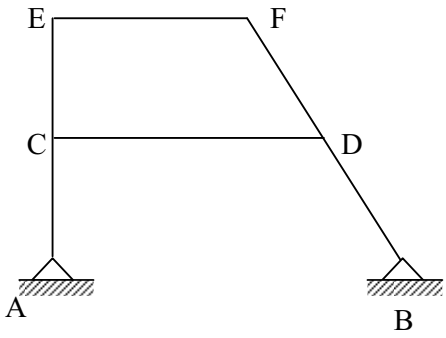
Suatu portal dengan kantilever seperti pada Gambar. Perletakan A adalah jepit dan B adalah sendi.
Tentukan jenis struktur tersebut.

3).



Suatu portal seperti pada gambar.
Perletakan A, B, dan C adalah sendi.
Tentukan jenis struktur tersebut

4).



Suatu portal seperti pada gambar.
Perletakan A dan B adalah sendi
Tentukan jenis struktur tersebut.

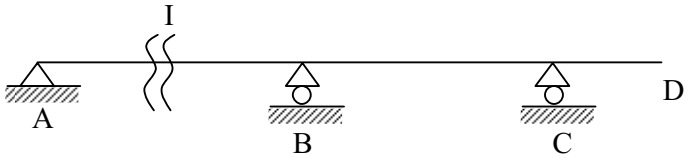
2.1.4. Rangkuman

- Persamaan syarat-syarat keseimbangan ada 3 buah : $\Sigma V = 0$
  $\Sigma H = 0$
  $\Sigma M = 0$
- Konstruksi disebut statis tidak tertentu jika tidak bisa diselesaikannya dengan bantuan persamaan keseimbangan.
- Tingkat atau derajat ke "statis tidak tentuan" struktur adalah jumlah kelebihan bilangan yang tidak diketahui dari jumlah persamaan keseimbangan (3 buah).

2.1.5. Penutup

Untuk mengukur prestasi mahasiswa dapat melihat kunci dari soal-soal yang ada sebagai berikut :

1)



A – sendi, ada 2 reaksi perletakan

B – rol, ada 1 reaksi perletakan

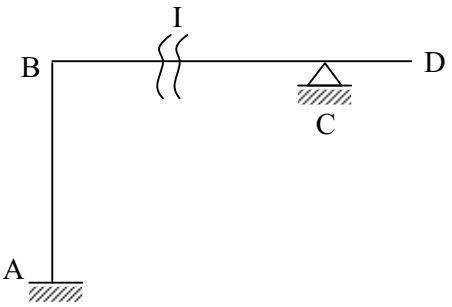
C – rol, ada 1 reaksi perletakan

Total reaksi perletakan R = 4 > 3 (persamaan keseimbangan). Kelebihan 1 reaksi perletakan.

Gaya dalam pada sebuah potongan ada 3 berarti tidak kelebihan gaya dalam.

Jadi struktur termasuk "statis tidak tertentu" tingkat 1 (luar).

2).



A – jepit, ada 3 reaksi perletakan

C – sendi, ada 2 reaksi perletakan

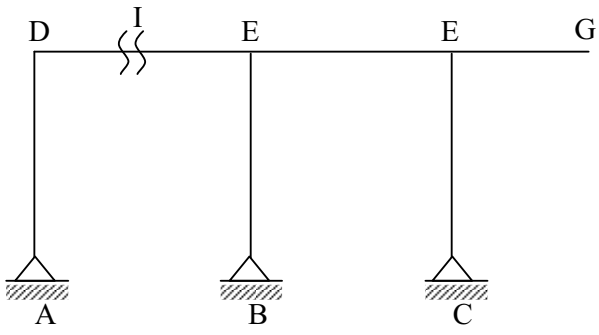
Total reaksi perletakan R = 5 > 3 (persamaan keseimbangan)

Berarti kelebihan 2 reaksi perletakan.

Gaya dalam pada sebuah potongan ada 3, berarti tidak kelebihan gaya dalam.

Jadi struktur termasuk "statis tidak tertentu" tingkat 2 (luar).

3).



A – sendi, ada 2 reaksi perletakan

B – sendi, ada 2 reaksi perletakan

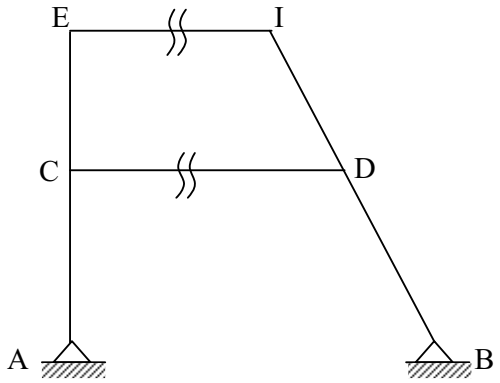
C – sendi, ada 2 reaksi perletakan

Total reaksi perletakan R = 6 > 3 (persamaan keseimbangan) berarti kelebihan 3 reaksi perletakan.

Gaya dalam pada sebuah potongan ada 3, berarti tidak kelebihan gaya dalam

Jadi struktur termasuk "statis tidak tertentu" tingkat 3 (luar).

4).



A – sendi, ada 2 reaksi perletakan

B – sendi, ada 2 reaksi perletakan

Total reaksi perletakan R = 4 > 3 (persamaan keseimbangan) Berarti kelebihan 1 reaksi perletakan.

Gaya dalam pada potongan ada 2 x 3 = 6 > 3 berarti kelebihan 3 gaya dalam.

Jadi struktur termasuk "statis tidak tertentu" tingkat 4 (1 luar dan 3 dalam)

2.1.6. Daftar Pustaka

1. Chu Kia Wang, Statically Indeterminate Structures", Mc Graw-Hill, Book company, INC.

2.1.7. Senarai

Struktur statis tidak tertentu adalah struktur yang tidak dapat diselesaikan hanya dengan persamaan keseimbangan.

2.2. Judul : Penyelesaian struktur statis tidak tertentu dengan metoda *"Consistent Deformation"*.

Tujuan Pembelajaran Umum

Setelah membaca bagian ini mahasiswa akan memahami bagaimana menyelesaikan suatu struktur statis tidak tertentu dengan metoda *"Consistent Deformation"*.

Tujuan Pembelajaran Khusus

Mahasiswa selain dapat memahami metoda *"Consistent Deformation"* juga dapat menyelesaikan suatu struktur statis tidak tertentu, yaitu menghitung semua gaya-gaya luar (reaksi perletakan) dan gaya-gaya dalam (gaya normal, gaya lintang, momen) struktur tersebut dengan menggunakan metoda *"Consistent Deformation"*.

2.2.1. Pendahuluan

Metoda *"Consistent Deformation"* ini adalah cara yang paling umum dipakai untuk menyelesaikan perhitungan suatu struktur statis tidak tertentu. Dari pembahasan sebelumnya kita tahu bahwa suatu struktur statis tidak tertentu adalah suatu struktur yang tidak dapat diselesaikan hanya dengan bantuan 3 (tiga) persamaan keseimbangan, karena mempunyai jumlah bilangan yang tidak diketahui lebih besar dari 3 (tiga) yaitu jumlah persamaan keseimbangan yang bisa disusun. Dengan kata lain kita butuh tambahan persamaan untuk bisa menyelesaikannya. Tingkat atau derajat ke statis tidak tentuan struktur, dilihat dan berapakah kelebihan bilangan yang tidak diketahui tersebut terhadap 3 (tiga). Kalau suatu struktur dinyatakan statis tidak tertentu tingkat 1 (satu), berarti kelebihan 1 (satu) bilangan yang tidak diketahui, sehingga butuh 1 (satu) persamaan tambahan untuk dapat menyelesaikan perhitungan struktur tersebut, kalau suatu struktur dinyatakan statis tidak tertentu tingkat 2 (dua) maka butuh 2 (dua) persamaan tambahan, dan seterusnya. Bilangan-bilangan yang tidak diketahui tersebut berupa gaya luar (reaksi perletakan) ataupun gaya dalam (gaya normal, gaya lintang, momen).

Untuk mendapatkan persamaan tambahan tersebut kita akan membuat struktur menjadi statis tertentu dengan menghilangkan gaya kelebihan yang ada, dan menghitung deformasi struktur statis tertentu tersebut akibat beban yang ada. Setelah itu struktur statis tertentu tersebut dibebani dengan gaya kelebihan yang dihilangkan tadi, dan juga dihitung deformasinya. Deformasi adalah defleksi atau rotasi dari suatu titik pada struktur.

Deformasi yang dihitung disini disesuaikan dengan gaya kelebihan yang dihilangkan. Misalnya kalau gaya yang dihilangkan tersebut gaya horizontal, maka yang dihitung defleksi horizontal pada tempat gaya yang dihilangkan tadi seharusnya bekerja. Kalau gaya vertical, yang dihitung defleksi vertical sedangkan kalau yang dihilangkan tersebut berupa momen, maka yang dihitung adalah rotasi. Setelah deformasi akibat beban yang ada dan gaya-gaya kelebihan yang dikerjakan sebagai beban telah dihitung, maka dengan melihat kondisi fisik dari struktur asli, kita susun persamaan-persamaan tambahan yang diperlukan. Misalnya untuk perletakan rol, maka defleksi tegak lurus perletakan harus sama dengan nol, untuk perletakan sendi defleksi vertical maupun horizontal sama dengan nol, sedangkan untuk perletakan jepit, defleksi vertical, defleksi horizontal dan rotasi sama dengan nol. Persamaan-persamaan tambahan ini disebut persamaan *"Consistent Deformation"* karena deformasi yang ada harus konsisten (sesuai) dengan struktur aslinya.

Setelah persamaan "*Consistent Deformation*" disusun, maka gaya-gaya kelebihan dapat dihitung, dan gaya yang lain dapat dihitung dengan persamaan keseimbangan, setelah gaya-gaya kelebihan tadi didapat. Demikianlah konsep dasar dari metoda "*Consistent Deformation*" dipakai untuk menyelesaikan struktur statis tidak tertentu.

2.2.2. Langkah-langkah yang harus dikerjakan pada metoda *"Consistent Deformation"*

Untuk menyelesaikan perhitungan struktur statis tidak tertentu dengan metoda *"Consistent Deformation"* urutan langkah-langkah yang harus dikerjakan adalah sebagai berikut :

- Tentukan tingkat atau derajat ke statis tidak tentuan struktur
- Buatlah struktur menjadi statis tertentu dengan menghilangkan gaya kelebihan yang ada.
- Hitung deformasi struktur statis tertentu tersebut akibat beban yang ada.
- Beban yang ada dihilangkan, gaya kelebihan dikerjakan sebagai beban, dan dihitung deformasinya. Kalau gaya kelebihan lebih dari satu, gaya kelebihan dikerjakan satu persatu bergantian.

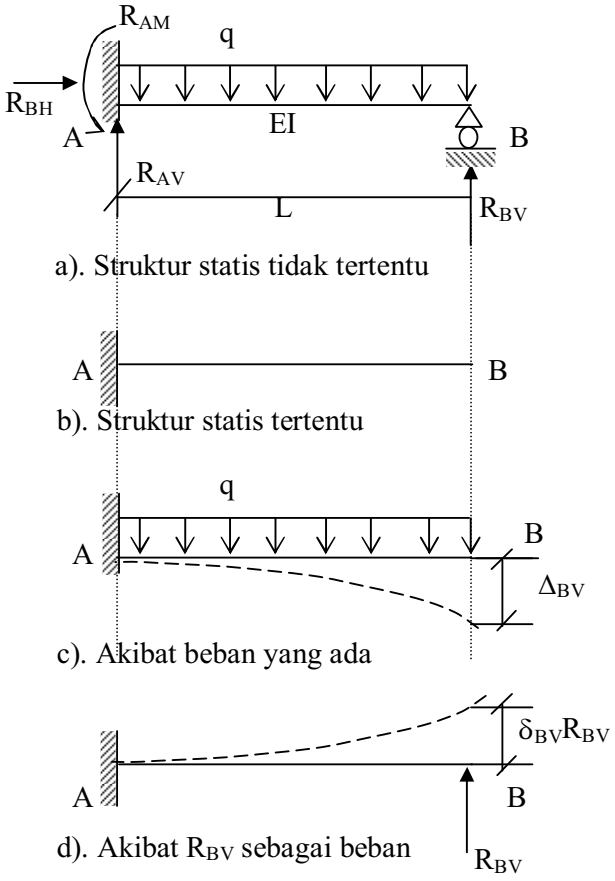
Catatan : deformasi yang dihitung disesuaikan gaya kelebihan yang dihilangkan.

- gaya vertical defleksi vertical
- gaya horizontal defleksi horizontal
- Momen rotasi

- Setelah deformasi akibat beban yang ada dan gaya-gaya kelebihan dari struktur statis tertentu tersebut dihitung, dengan melihatkan kondisi fisik struktur aslinya yaitu struktur statis tidak tertentu, kita susunan persamaan *"Consistent Deformation"*
- Dengan bantuan persamaan *"Consistent Deformation"* gaya-gaya kelebihan dapat dihitung. Setelah gaya-gaya kelebihan didapat, gaya-gaya yang lain dapat dihitung dengan bantuan 3 (tiga) persamaan keseimbangan yang ada.

Contoh :

1).



Gambar 2.6.

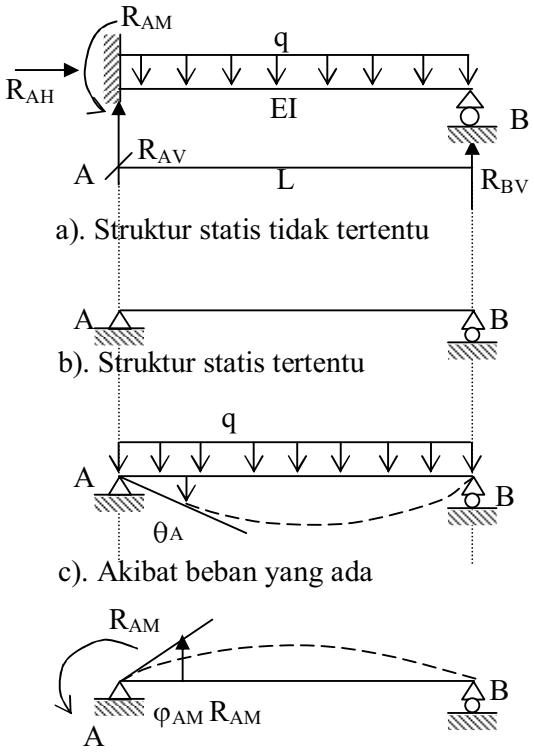
Balok diatas 2 tumpuan
A – jepit B – rol

- R = 4 > 3 (kelebihan 1 R)
  Struktur statis tidak tertentu tingkat 1 (satu)
- R_{BV} – sebagai gaya kelebihan
  B – menjadi bebas
  Δ_{BV} – defleksi yang dihitung
- Akibat beban yang ada dihitung defleksi vertical di B (Δ_{BV}).
- Akibat gaya kelebihan (R_{BV}) sebagai beban dihitung defleksi vertical di B (δ_{BV} R_{BV})
- Struktur aslinya B adalah rol, maka seharusnya defleksi vertical di B sama dengan nol.

Persamaan *"Consistent Deformation"*
$\Sigma \Delta_{BV} = 0$
$\Delta_{BV} + \delta_{BV} R_{BV} = 0$

- Dari persamaan *"Consistent Deformation"* yang disusun R_{BV} dapat dihitung. Setelah R_{BV} didapat, gaya-gaya yang lain dapat dihitung dengan persamaan keseimbangan.

2).



Gambar 2.7.

Soal no.1 dapat diselesaikan juga sebagai berikut :

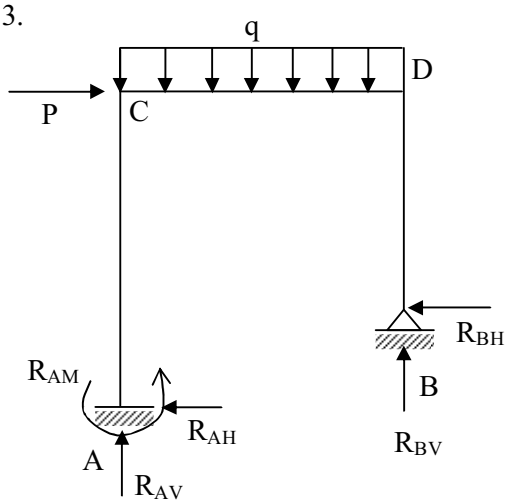
- R = 4 > 3 (kelebihan 1 R)
  Struktur statis tidak tertentu tingkat 1 (satu).
- R_{AM}-sebagai gaya kelebihan
  A – menjadi sendi
  θ_A – rotasi yang dihitung
- Akibat beban yang ada dihitung rotasi di A (θ_A)
- Akibat R_{AM} sebagai beban dihitung rotasi di A ($\varphi_{AM}\, R_{AM}$).

- Struktur aslinya A adalah jepit, sebelumnya rotasi di A sama dengan nol. Persamaan *"Consistent Deformation"* : $\Sigma\, \theta_A = 0$

  $\theta_A + \varphi_{AM}\, R_{AM} = 0$

- Dari persamaan *"Consistent Deformation"* yang disusun, gaya kelebihan R_{AM} dapat dihitung. Setelah R_{AM} didapat, gaya-gaya yang lain dapat dihitung dengan persamaan keseimbangan.

3.

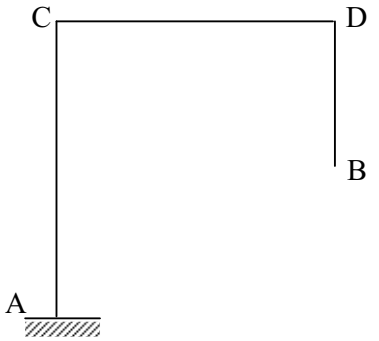


Portal dengan perletakan A jepit dan B sendi.

- R = 5 > 3 (kelebihan 2 R)

Struktur statis tidak tertentu tingkat 2.

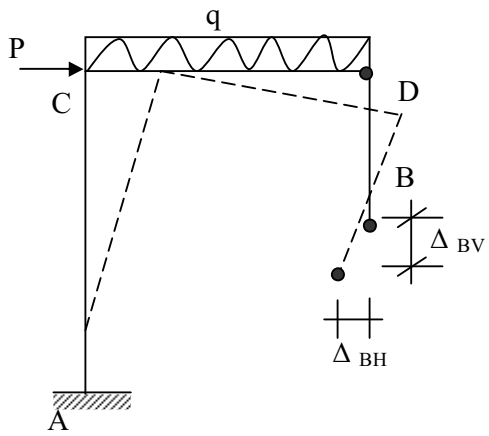
a). Struktur statis tidak tertentu



- R_{BV} dan R_{BH} – sebagai gaya kelebihan
  B – menjadi bebas

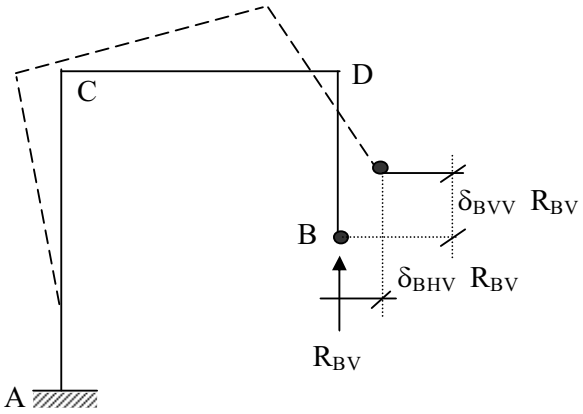
  Δ_{BV} dan Δ_{BH} - defleksi-defleksi yang dihitung

b). Struktur statis tertentu



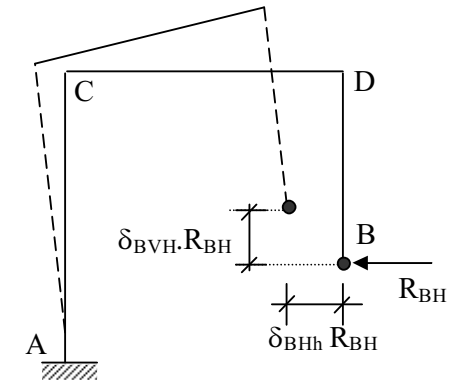
- Akibat beban yang ada dihitung defleksi vertical dan defleksi horizontal dari B (Δ_{BV} dan Δ_{BH})

c). Akibat beban yang ada



- Akibat gaya kelebihan R_{BV} dikerjakan sebagai beban, dihitung defleksi vertical dan defleksi horizontal dari B (δ_{BVV} R_{BV} dan S_{BHV} R_{BV})

d). akibat gaya kelebihan R_{BV}



- Akibat gaya kelebihan R_{BH} dikerjakan sebagai beban, dihitung defleksi vertical dan defleksi horizontal dari B.

e). akibat gaya kelebihan R_{BH}

- Struktur aslinya B adalah sendi, seharusnya defleksi vertical dan horizontalnya sama dengan nol.

  Persamaan *"Consistent Deformation"*.

  (1) $\Sigma\ \Delta_{BV} = 0$ ⇒ $\Delta_{BV} + \delta_{BVV}\ R_{BV} + \delta_{BVh}\ R_{BH}$

  (2) $\Sigma\ \Delta_{BH} = 0$ ⇒ $\Delta_{BH} + \delta_{BHV}\ R_{BV} + \delta_{BHh}\ R_{BH}$

- Dengan 2 (dua) persamaan *"Consistent Deformation"* yang disusun, gaya kelebihan R_{BV} dan R_{BH} dapat dihitung, setelah R_{BV} dan R_{BH} didapat, gaya-gaya yang lain dapat dihitung dengan persamaan keseimbangan.

2.2.3. Menghitung Deformasi dari Suatu Struktur Statis Tertentu

Setelah mempelajari langkah-langkah yang harus dikerjakan untuk menyelesaikan struktur statis tidak tertentu dengan metoda *"Consistent Deformation"* diatas, maka kita tahu bahwa menghitung deformasi pada struktur statis tertentu adalah hal yang sangat penting. Untuk menghitung deformasi ini kita bisa memakai metoda-metoda yang pernah kita pelajari pada mata kuliah Mekanika Bahan, seperti metoda "Unit Load", metoda "Momen Area" dan metoda "Persamaan Garis Statis". Pada pembahasan kali ini kita akan menekankan pada metoda "unit load" karena metoda "unit load" dapat dipergunakan untuk menghitung deformasi dari struktur balok portal maupun konstruksi Rangka Batang.

Untuk menyegarkan kembali ingatan kita pada metoda "unit load" marilah kita perhatikan perumusan dan contoh perhitungan dibawah ini. Untuk struktur balok dan portal statis tertentu rumus deformasi adalah sebagai berikut :

$$\Delta \text{ atau } \theta = \int_{o}^{s} \frac{M_x \, m_x}{E I_x} d_x$$

Δ - defleksi θ - rotasi

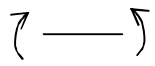
M_x – persamaan momen akibat beban yang ada

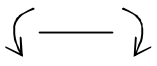
m_x – persamaan momen akibat beban unit

E - Modulus elastis bahan batang

I_x - Momen Enersia penampang batang

$\int_{0}^{s} dx$ - Integral seluruh panjang struktur

Catatan : Momen positif (+) 

Momen negatif (-) 

Untuk Δ (defleksi), beban unit berupa beban unit gaya ($\downarrow$ 1), sedangkan untuk θ (rotasi), beban unit berupa beban unit momen (1).

Arah defleksi / rotasi ditentukan oleh nilai hasil perhitungan :

- Kalau hasil perhitungan positif (+), arah defleksi / rotasi searah dengan beban unit yang dikerjakan.
- Kalau hasil perhitungan negatif (-) , arah defleksi / rotasi berlawan arah dengan beban unit yang dikerjakan.

Pada struktur "Konstruksi Rangka Batang" hanya ada defleksi titik simpul.

Untuk struktur konstruksi Rangka Batang statis tertentu, karena setiap batang mempunyai nilai gaya batang yang tetap (konstant), maka perumusannya tidak memerlukan perhitungan integral melainkan hanya penjumlahan secara aljabar saja. Rumus defleksi untuk konstruksi rangka batang statis tertentu adalah sebagai berikut :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i \mu_i}{(AE)_i}$$

Δ - defleksi

S – gaya batang akibat beban yang ada.

μ - gaya batang akibat beban unit

A – luas penampang batang

E – modulus elastis bahan batang

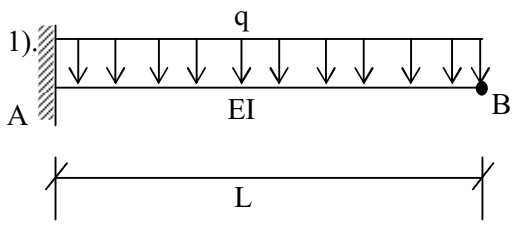
i – nomor batang dari 1 sampai dengan n

$\sum_{i=1}^{n}$ - penjumlahan aljabar dari batang no.1 sampai dengan no. n

Catatan : Gaya batang tarik (+)

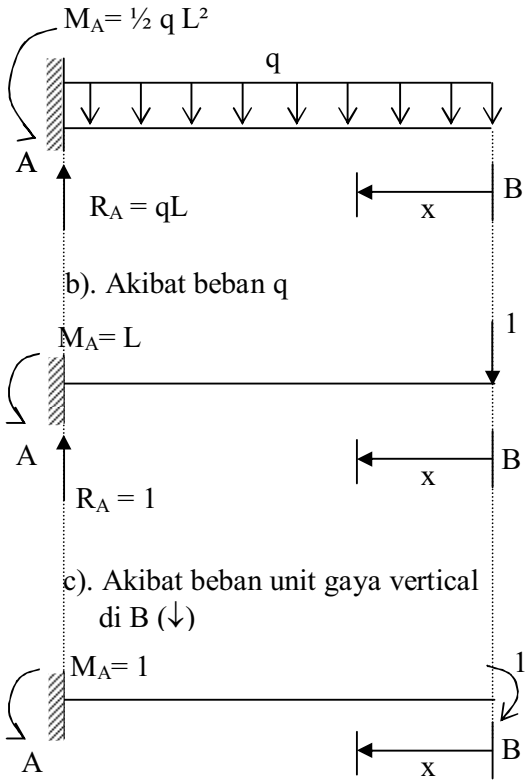
Gaya batang tekan (-)

Contoh perhitungan deformasi pada struktur statis tertentu



a). Balok Kantilever

Suatu struktur statis tertentu berupa balok kantilever dengan ukuran dan pembebanan seperti tergambar. Hitunglah defleksi dan rotasi titik B akibat beban terbagi rata q.



Gambar 2.8.

Penyelesaian :

- Akibat beban q

  $R_A = qL \quad (\uparrow)$

  $M_A = \frac{1}{2} qL^2$ ( )

- Persamaan momen (M_x) :

  $\overrightarrow{BA} \quad 0 \le x \le L$

  $Mx = -\frac{1}{2} qx^2$

- Akibat beban unit gaya vertical di B (↓)

  $R_A = 1 \ (\uparrow)$

  $M_A = 1 \times L = L$ ( )

  Persamaan momen (m_v) :

  $\overrightarrow{BA} \quad 0 \le x \le L$

  $m_V = -1 \times X = -X$

- Akibat beban unit momen di B ( )

  $M_A = 1$

  $R_A = 0$

  Persamaan momen (m_r)

  $\overrightarrow{BA} \quad 0 \le x \le L$

  $m_r = -1$

Defleksi di B : $\Delta_{BV} = \int_0^L \frac{Mx.m_v}{EI} dx$

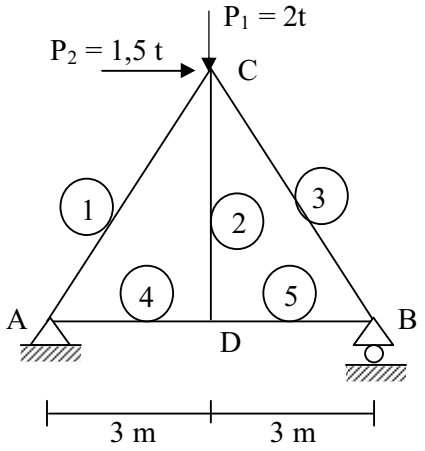
$$\Delta_{BV} = \int_0^L \frac{(-1/2qx^2)(-x)}{EI} dx = +\frac{I}{EI} \int_0^L \frac{1}{2} q x^3 \, dx = +\frac{1}{EI} [\frac{1}{8} q x^4]_0^L$$

$$\Delta_{BV} = +\frac{qL^4}{8EI} \qquad (\downarrow) \text{ (kebawah)}$$

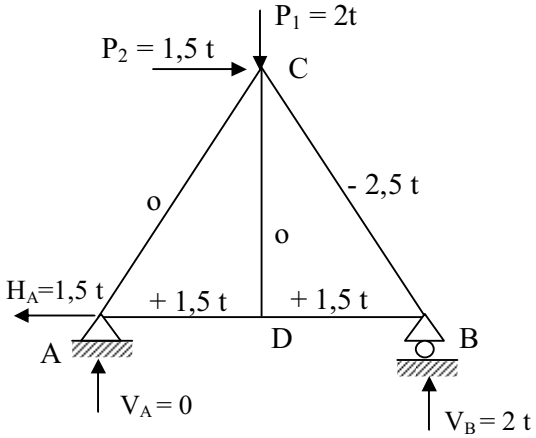
Rotasi di B : $\theta_B = \int_0^L \frac{Mx\, m_r}{EI} dx$

$$\theta_B = \int_0^L \frac{(-1/2\, qx^2)(-1)}{EI} dx = +\frac{I}{EI} [\frac{1}{6} qx^3]_o^L = +\frac{qL^3}{6EI}$$ ( ) (searah jarum jam).

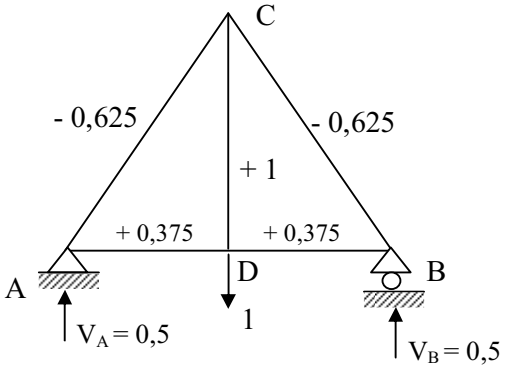
2).



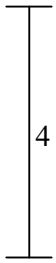
a). Konstruksi Rangka Batang



b).Akibat beban yang ada



c). Akibat beban unit vertikal di D (↓)



Suatu konstruksi Rangka Batang statis tertentu dengan ukuran dan beban seperti tergambar.
Kalau A dan E semua batang sama, berapakah defleksi vertical di D (Δ_{DV}) dan defleksi horizontal di B (Δ_{BH}).

- Akibat beban yang ada • [S]

  $\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 1{,}5$ t (←)

  $\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A \times 4 + 1{,}5 \times 4 - 2 \times 3 = 0$

  $V_A = 0$

  $\Sigma V = 0 \rightarrow V_B = 2$ t (↑)

  Dengan keseimbangan titik simpul gaya-gaya batang didapat sebagai berikut :

  $S_1 = S_2 = 0$ $\quad S_3 = -2{,}5$ t

  $S_4 = S_5 = +1{,}5$ t

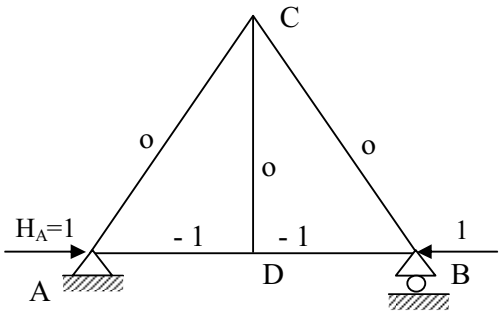
- Akibat beban unit vertical di D (↓). (μ_V)

  $R_A = R_B = 0{,}5$

  Gaya-gaya batang didapat :

  $\mu_{V1} = -0{,}625$ $\quad \mu_{V2} = +1$

  $\mu_{V3} = -0{,}625$ $\quad \mu_{V4} = \mu_{V5} = 0{,}375$



d). Akibat beban unit horizontal di B (←)

- Akibat beban unit horizontal di B (←). (μ_H)

  $H_A = 1$ (→)

  Gaya-gaya batang didapat :

  $\mu_{H1} = \mu_{H2} = \mu_{H3} = 0$

  $\mu_{H4} = \mu_{H5} = -1$

Gambar 2.9

Tabel Perhitungan Defleksi

No. Batang	L / AE	S	μ_V	μ_H	$S\mu_V$ / AE	$S\mu_H$ / AE
1	5/AE	0	- 0.625	0	0	0
2	4/AE	0	+ 1	0	0	0
3	5/AE	- 2.5	- 0.625	0	+ 7.8125/AE	0
4	3/AE	+ 1.5	+ 0.375	- 1	+ 1.6875/BE	- 4.5/AE
5	3/AE	+ 1.5	+ 0.375	- 1	+ 1.6875/AE	- 4.5/AE
				Σ	+ 11.1875/AE	- 09/AE

Defleksi vertical di D : $\Delta_{DV} = \sum_{i=1}^{5} \frac{S_i \mu_{Vi}}{AE} = +\frac{11{,}1875}{AE}$. (↓) (kebawah)

Defleksi horizontal di B : $\Delta_{BH} = \sum_{i=1}^{5} \frac{S_i \mu_{Hi}}{AE} = -\frac{9}{AE}$. (→) (kekanan)

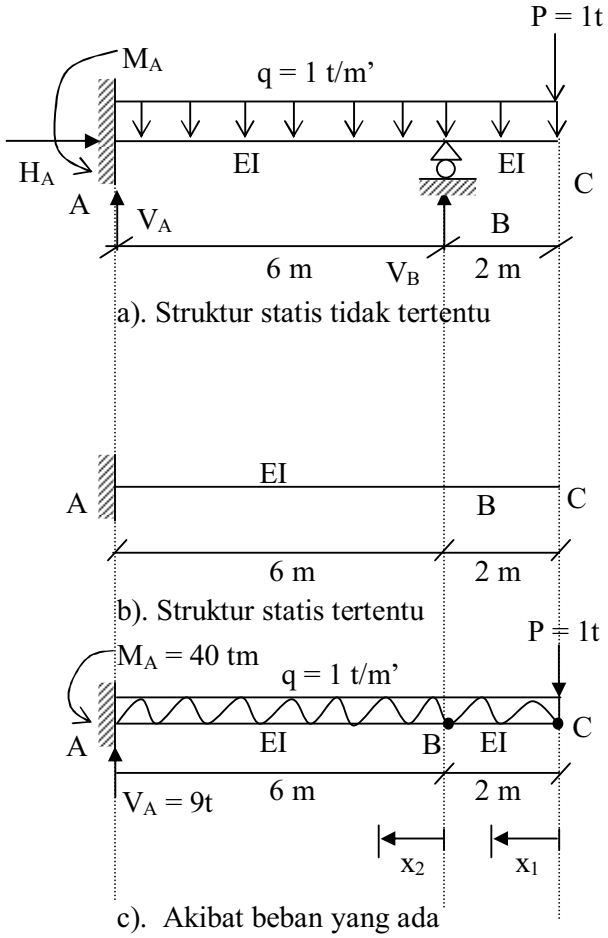
2.3. Penyelesaian Struktur Balok dan Portal Statis Tidak Tertentu dengan Metoda *"Consistent Deformation"*

Dari pembahasan sebelumnya kita ketahui bahwa konsep dari metoda *"Consistent Deformation"* adalah membuat struktur statis tidak tertentu menjadi struktur yang statis tertentu dengan menghilangkan gaya kelebihan yang ada. Setelah itu menghitung deformasi dari struktur statis tertentu tersebut akibat beban yang ada dan akibat gaya-gaya kelebihan tadi sebagai beban, lalu dengan melihat kondisi fisik struktur aslinya disusun persamaan *"Consistent Deformation"* . Jumlah persamaan *"Consistent Deformation"* tersebut sebanyak gaya kelebihan

yang ada. Dari persamaan-persamaan *"Consistent Deformation"* yang disusun inilah besarnya gaya-gaya kelebihan yang ada dapat dihitung.

Semakin banyak gaya kelebihan yang ada maka akan semakin banyak persamaan yang harus disusun, sehingga perhitungannya akan semakin kompleks. Maka dari itu untuk struktur balok dan portal pemakaian metoda *"Consistent Deformation"* ini akan lebih efektif untuk yang derajat ke statis tidak tentuannya tidak terlalu besar atau gaya kelebihannya tidak terlalu banyak. Karena untuk struktur statis tidak tertentu dalam, kelebihan satu potongan batang saja gaya kelebihannya ada 3 (tiga), maka untuk contoh-contoh perhitungan penyelesaian balok dan portal statis tidak tertentu berikut ini hanyalah struktur statis tidak tertentu luar, atau kelebihan reaksi perletakan saja yang akan disajikan.

2.3.1. Contoh-contoh penyelesaian



a). Struktur statis tidak tertentu

b). Struktur statis tertentu

c). Akibat beban yang ada

Suatu balok statis tidak tertentu dengan ukuran dan pembebanan seperti tergambar. A perletakan jepit dan B perletakan rol. Hitung gaya-gaya dalam dan reaksi perletakannya dengan metoda *"Consistent Deformation"*. Gambarkan bidang M, N dan D nya.

Penyelesaian :

- R = 4 > 3 ⇒ kelebihan 1 reaksi. Struktur statis tidak tertentu tingkat 1.
- V_B – sebagai gaya kelebihan
  Δ_{BV} – defleksi yang dicari.
- Akibat beban yang ada :
  $V_A = 1 \times 8 + 1 = 9$ t (↑)
  $M_A = ½ (1) 8^2 + 1 \times 8 = 40$ tm. ↺

Persamaan momen : (Mx)

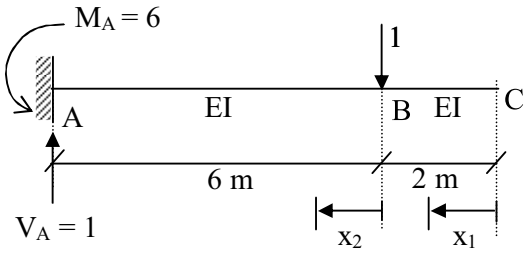
$\overrightarrow{CB}$ $0 \le x_1 \le 2$

$M_{x1} = - \frac{1}{2} x_1^2 - x_1 = - (\frac{1}{2} x^2_1 + x_1)$

$\overrightarrow{BA}$ $0 \le x_2 \le 6$

$M_{x2} = - \frac{1}{2} (x_2 + 2)^2 - 1(x_2 + 2)$

$= - (\frac{1}{2} x^2_2{}^2 + 3x_2 + 4)$



- Akibat beban unit di B (↓)
- (Akibat beban V_B = 1t (↓))

V_A = 1t (↑)

M_A = - 1 x 6 = -6

Persamaan momen : (m_x).

$\overrightarrow{CB}$ $0 \le x_1 \le 2$ $m_{x1} = 0$

$\overrightarrow{BA}$ $0 \le x_2 \le 6$ $m_{x2} = -x_2$

- Akibat beban yang ada :

$$\Delta_{BV} = \int_0^s \frac{Mx\, mx}{EI} dx = \int_0^2 \frac{-(1/2\, x_1^2 + x_1)\,(0)}{EI} dx_1 + \int_0^6 \frac{-(1/2\, x_2^2 + 3x_2 + 4)(x_2)}{EI} d_{x2}$$

$$= + \frac{1}{EI} \left[/8\, x_2^4 + x_2^3 + 2x_2^2 \right]_0^6 = + \frac{450}{EI} (\downarrow)$$

- Akibat beban V_B = 1t (↓)

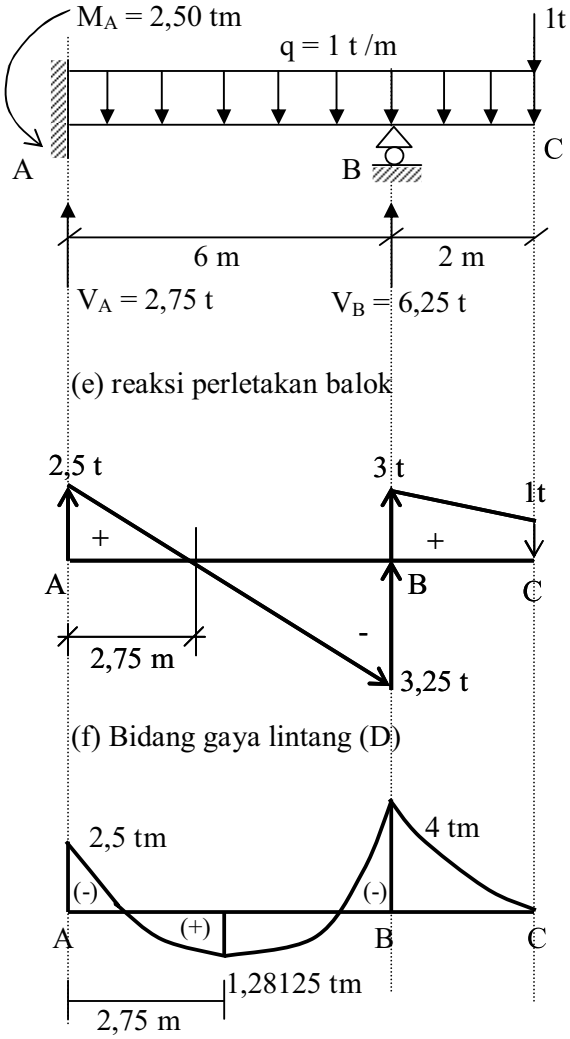
$$\delta_{BV} = \int_0^s \frac{m_x^2}{EI} dx = \int_0^6 \frac{(-x_2)^2}{EI} dx_2 = \frac{1}{EI} [1/3\, x_2^3]_0^6 = + \frac{72}{EI} (\downarrow)$$

- Struktur aslinya B adalah rol $\Sigma \Delta_{BV} = 0$

  Persamaan *"Consistent Deformation"*

$$\Delta_{BV} + S_{BV}\, V_B = 0$$

$$\frac{450}{EI} + \frac{72}{EI} V_B = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = -6{,}25 \text{ t } (\uparrow)$$



(e) reaksi perletakan balok

(f) Bidang gaya lintang (D)

(g). Bidang Momen

Gambar 2.10

$\Sigma V = 0 \rightarrow \quad V_A + V_B = 8 + 1$

$V_A = + 2{,}75$ t ($\uparrow$)

$\Sigma H = 0 \rightarrow \quad H_A = 0$

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow \quad M_A + V_B \times 6 - 8 \times 4 - 1 \times 8 = 0$

$M_A = + 2{,}5$ tm

- Bidang Gaya Normal (N) → N = 0
- Bidang Momen (M)

$\overrightarrow{AB} \quad 0 \le x_1 \le 6$

$Mx_1 = 2{,}75\, x_1 - 2{,}50 - \frac{1}{2} x_1^2$

$\frac{dm_{x1}}{dx_1} = 0 = 2{,}75 - x_1 \rightarrow x_1 = 2{,}75\text{m}$

$M_{max} = 2{,}75 \times 2{,}75 - 2{,}50 - \frac{1}{2}\,(2{,}75)^2$

$= + 1{,}28125$ tm

$\overrightarrow{CB} \quad 0 \le x_2 \le 2$

$Mx_2 = - \frac{1}{2}\, x_2^2 - x_2$

$M_B = - \frac{1}{2}\,(2)^2 - 2 = - 4$ tm

- Bidang Gaya Lintang (D)

$\overline{AB} \quad 0 \le x_1 \le 6 \rightarrow \quad D_{x1} = 2{,}75 - x_1$

$Dx = 0 \rightarrow 2{,}75 - x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 2{,}75$

$D_A = 2{,}75$ t

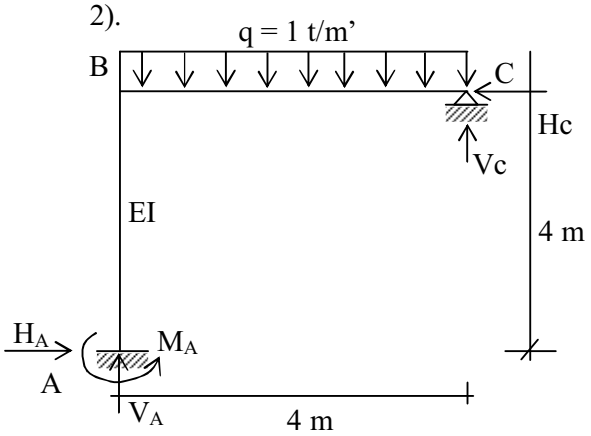
$D_{Bkr} = 2{,}75 - 6 = - 3{,}25$ t

$\overline{CB} \quad 0 \le x_2 < 2 \rightarrow \quad Dx_2 = x_2 + 1$

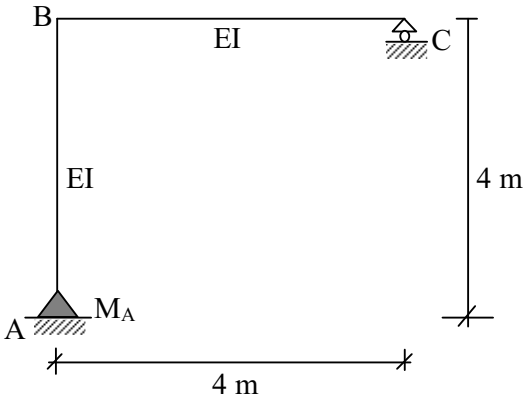
$D_C = +1$

$D_{Bkn} = +3$

2).



a). Struktur statis tidak tertentu



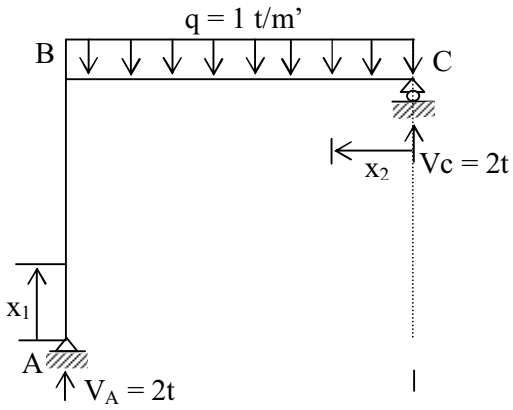
b). Struktur statis tertentu

Suatu struktur portal statis tidak tertentu dengan ukuran dan pembebanan seperti pada Gambar 2.12. A perletakan jepit dan C perletakan sendi

- Selesaikan portal tersebut dengan metoda *"Consistent Deformation"*
- Gambarkan bidang M, N dan D nya

Penyelesaian :

- R = 5 > 3 kelebihan 2 reaksi. Struktur statis tidak tertentu tingkat 2.
- M_A dan H_C sebagai gaya kelebihan sehingga A menjadi sendi dan C menjadi rol.
- θA dan ΔCH deformasi yang dihitung.



(c). Akibat beban yang ada

- Akibat beban yang ada.

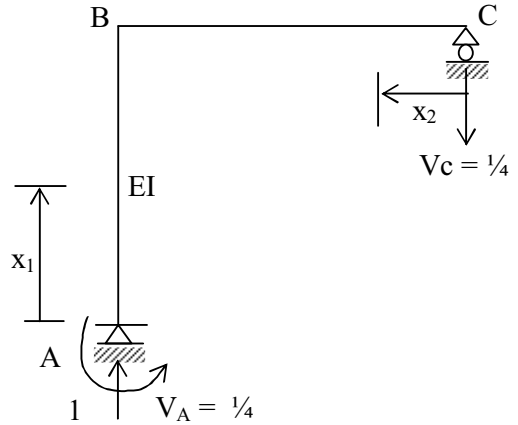
  $\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 0$

  $V_A = V_C = ½ \times 1 \times 4 = 2$ t (↑)

  Persamaan momen (Mx)

  $\overrightarrow{AB}$ $0 \leq x_1 \leq 4$ m $\rightarrow Mx_1 = 0$

  $\overrightarrow{CB}$ $0 \leq x_2 \leq 4$ m $\rightarrow Mx_2 = 2\,x_2 - ½\,x^2_2$



d). Akibat beban unit momen di A ↶
(Beban M_A = 1 tm ↶)

- Akibat beban unit momen di A
  ↶ (beban M_A = 1 tm ↶)

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 0$

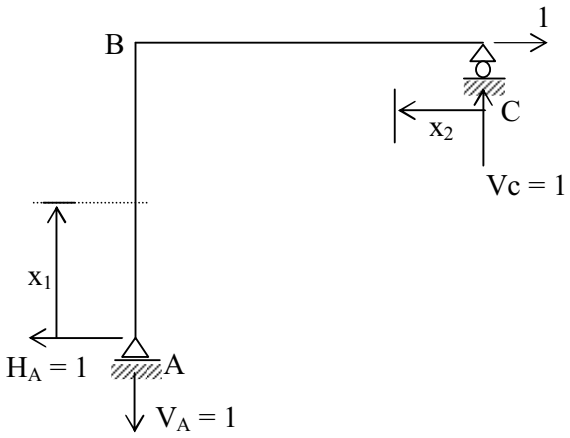
$\Sigma M_C = 0 \rightarrow V_A \cdot 4 - 1 = 0 \rightarrow V_A = ¼ \ (\uparrow)$

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_C = 0 \rightarrow V_C = -¼ \ (\downarrow)$

Persamaan momen (m_r)

$\overrightarrow{AB}, 0 \le x_1 \le 4$ m $\rightarrow m_{r1} = -1$

$\overrightarrow{CB}, 0 \le x_2 \le 4$ m $\rightarrow m_{r2} = -¼ x_2$



- Akibat beban unit horizontal di C (→)
  (akibat H_C = 1t →)

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 1t \ (\leftarrow)$

$\Sigma M_C = 0 \rightarrow V_A \times 4 + 1 \times 4 = 0 \rightarrow V_A = -1t \ (\downarrow)$

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_C = 0 \rightarrow V_C = +1t \ (\uparrow)$

Persamaan momen (m_h)

$\overrightarrow{AB}, 0 \le x_1 \le 4$ m $\rightarrow m_{h1} = +x_1$

$\overrightarrow{CB}, 0 \le x_2 \le 4$ m $\rightarrow m_{h2} = +x_2$

e). Akibat beban unit horizontal di C (→)
(beban H_C = 1t →)

- Deformasi akibat beban yang ada :

$$\theta A = \int_{0^s}^{s} \frac{M_x m_r}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^4 2x\left(2 - \frac{1}{2}x_2^2\right)\left(-\frac{x_2}{4}\right) d_{x2} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{6}x_2^3 + \frac{1}{32}x_2^4\right]_0^4 = -\frac{8}{3EI} \ \curvearrowright$$

$$\Delta_{CH} = \int_{0^s}^{s} \frac{M_x m_h}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^4 \left(2x_2 - \frac{1}{2}x_2^2\right) x_2 d_{x2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4\right)_0^4 = +\frac{32}{3EI} (\rightarrow)$$

Deformasi akibat M_A = 1 tm

$$\varphi_{Am} = \int_0^s \frac{m_r^2}{EI} dx = \frac{I}{EI}\int_0^4 (-1)^2 dx_1 + \frac{I}{EI}\int_0^4 \left(\frac{x_2}{4}\right)^2 dx_2 = \frac{I}{EI}(x_1)_0^4 + \frac{I}{EI}\left(\frac{x_2^3}{48}\right)_0^4 = +\frac{16}{3EI}$$

$$\delta_{CHm} = \int_0^s \frac{m_r m_h}{EI} dx = \frac{I}{EI}\int_0^4 (-1)(x_1)\, d_{x1} + \frac{I}{EI}\int_0^4 \left(\frac{x_2}{4}\right)(x_2)\, dx_2$$

$$= -\frac{I}{EI}\left(\frac{1}{2}x_1\right)_0^4 - \frac{I}{EI}\left(\frac{x_2^3}{12}\right)_0^4 = -\frac{40}{3EI}\ (\leftarrow)$$

- Deformasi akibat H_C = 1t ($\rightarrow$)

$$\varphi_{Ah} = \int_0^s \frac{m_h m_r}{EI} dx = \frac{I}{EI}\int_0^4 (x_1)(-1)\, d_{x1} + \frac{I}{EI}\int_0^4 (x_2)\left(\frac{x_2}{4}\right) dx_2$$

$$= -\left(\frac{1}{2}x_1\right)_0^4 - \frac{I}{EI}\left(\frac{x_2^3}{12}\right)_0^4 = -\frac{40}{3EI}$$

$$\delta_{CHh} = \int_0^s \frac{m_h^2}{EI} dx = \frac{I}{EI}\int_0^4 (x_1)^2\, d_{x1} + \frac{I}{EI}\int_0^4 (x_2)^2\, dx_2$$

$$= \frac{I}{EI}\left(\frac{x_1^3}{3}\right)_0^4 + \frac{I}{EI}\left(\frac{x_2^3}{3}\right)_0^4 = +\frac{128}{3EI}\ (\rightarrow)$$

- Struktur aslinya A adalah jepit, $\Sigma\, \theta_A = 0$
- dan C adalah sendi , $\Sigma\, \Delta_{CH} = 0$

Persamaan *"Consistent Deformation"*

$\Sigma\, \theta_A = 0$ $\quad \theta_A + \varphi_{Am} . M_A + \varphi_{Ah} H_C = 0$

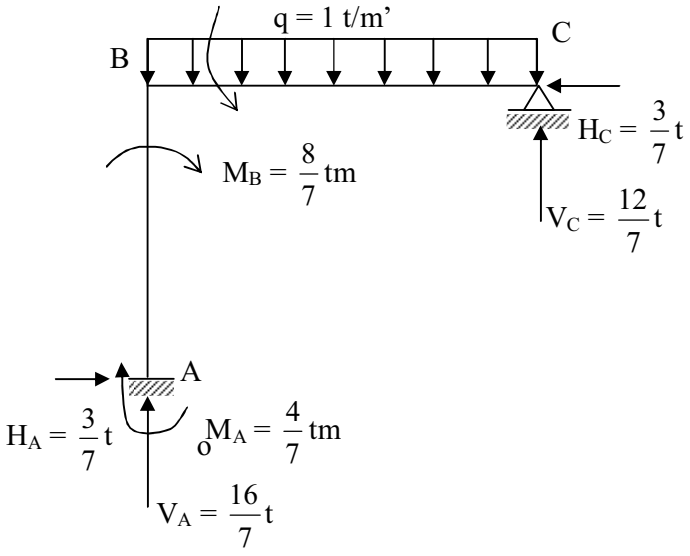
$$-\frac{8}{3EI} + \frac{16}{3EI} M_A - \frac{40}{3EI} H_C = 0 \rightarrow -1 + 2M_A - 5H_C = 0 \qquad (1)$$

$\Sigma\Delta_{CH} = 0$ $\quad \Delta_{CH} + \delta_{CHm} M_A - \delta_{CHh} H_C = 0$

$$+\frac{32}{3EI} - \frac{40}{3EI} M_A + \frac{128}{3EI} H_C = 0 \rightarrow +4 - 5M_A + 16H_C = 0 \qquad (2)$$

5 x (1) + 2 x (2) $\quad + 3 - 7\, H_C = 0$ $\quad H_C = -\frac{3}{7} t\ (\leftarrow)$

(1) ⇒ -1 + 2 M_A – 5 $(-\frac{3}{7})$ = 0 ⇒ $M_A = -\frac{4}{7} tm$ ↻



$\Sigma H = 0 \Rightarrow H_A + H_C = 0 \Rightarrow H_A = \frac{3}{7}$t (→)

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow V_C$ x 4 + H_C x 4 – 4 x 2 - M_A=0

$$V_C = \frac{1}{4}\ (8 + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} x 4)$$

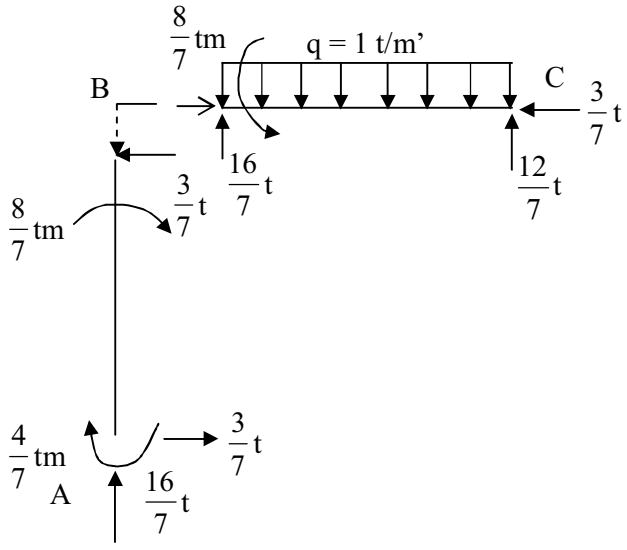
$$= \frac{12}{7}\ t\ (\uparrow)$$

$\Sigma V = 0 \Rightarrow V_A + V_C - 4 = 0$

$$VA = \frac{16}{7} t\ (\uparrow)$$

$M_B = V_C$ x 4 – 4 x 2 = $\frac{12}{7}$x 4 – 4 x 2 = $-\frac{8}{7}$tm

f). Reaksi perletakan struktur statis tidak terntetu



g). Free Body diagram

Bidang Gaya Normal (N) :

Batang AB ⇒ $N_{AB} = -\frac{16}{7}$t (tekan)

Batang BC ⇒ $N_{BC} = -\frac{3}{7}$t (tekan)

Bidang Gaya Lintang (D) :

Batang AB $D_{x1} = -\frac{3}{7}$t

$x_1 = 0$ $D_A = -\frac{3}{7}$t

$x_2 = 4$ m $D_{Bbw} = -\frac{3}{7}$t

Batang CB $Dx_2 = -\frac{12}{7t} + x_2$

$x_2 = 0$ $Dc = -\frac{12}{7}$

$x_2 = 4$ m $D_{Bkm} = -\frac{12}{7} + 4 = +\frac{16}{7}$t

Untuk $D_x = 0$ ⇒ $-\frac{12}{7} + x_2 = 0$

$$x_2 = +\frac{12}{7} m$$

Bidang Momen (M) :

Batang AB $M_{x1} = + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} x 1$

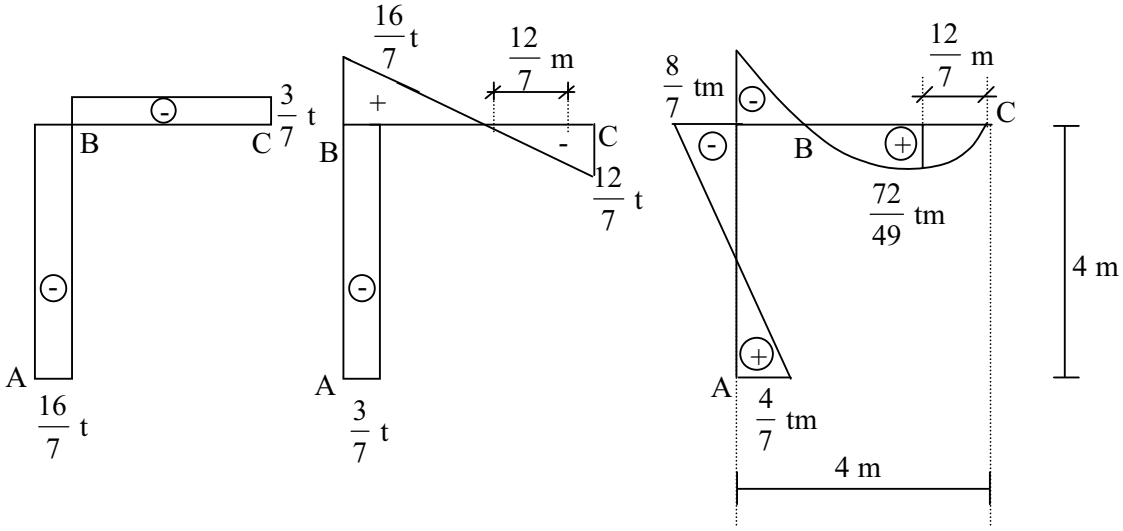
$_{x1} = 0$ $M_A = + \frac{4}{7}$ tm

$x_1 = 4$ $M_B = \frac{4}{7} - \frac{3}{7} x\ 4 = - \frac{8}{7}$ tm

Batang CB $M_{x2} = \frac{12}{7} x_2 - \frac{1}{2} x_2^{\ 2}$

M_{max} pada $x_2 = \frac{12}{7}$ m $(D_{x2} = 0) \rightarrow M_{max} = \frac{12}{7} x \frac{12}{7} - \frac{1}{2} (\frac{12}{7})^2 = + \frac{72}{49}$ tm

$X_2 = 4$ $M_B = \frac{12}{7} x\ 4 - \frac{1}{2} (4)^2 = - \frac{8}{7}$ tm

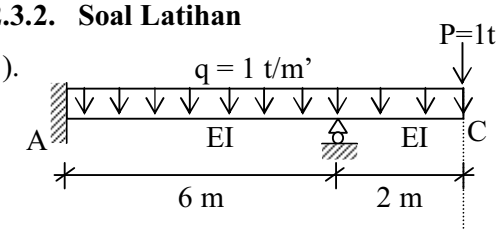


h). Bidang Gaya Normal (N) (d), Bidang Gaya Lintang (D) (J) Bidang Momen (M)

Gambar 2.12.

2.3.2. Soal Latihan

1).



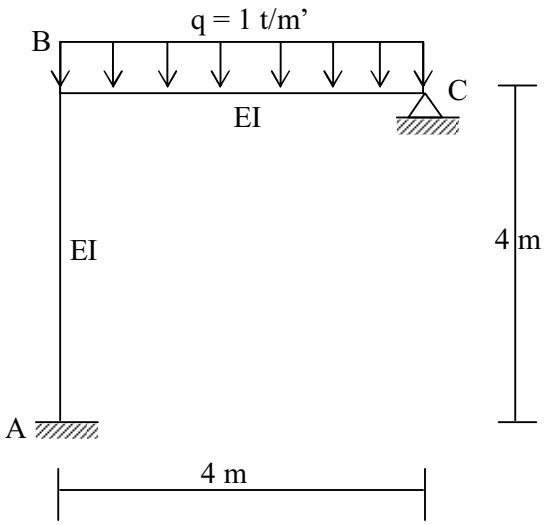
Balok statis tidak tertentu dengan ukuran dan pembebanan seperti tergambar.

A perletakan jepit dan B perletakan rol.

Ditanyakan :

- Dengan memakai reaksi momen di A (M_A) sebagai gaya kelebihan, hitung reaksi-reaksi perletakannya dengan metoda *"Consistent Deformation"*.
- Gambarkan bidang M, N dan D nya.

2).

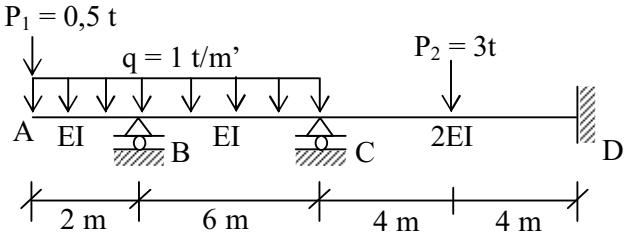


Sebuah portal statis tidak tertentu dengan ukuran dan pembebanan seperti dalam gambar. A perletakan jepit dan C perletakan sendi.

Ditanyakan :

- Kalau reaksi perletakan C vertical dan horizontal (V_C dan H_C) sebagai gaya kelebihan hitung reaksi-reaksi perletakan struktur statis tidak tertentu tersebut dengan metoda *"Consistent Deformation"*
- Gambarkan bidang M, D dan N nya.

3).

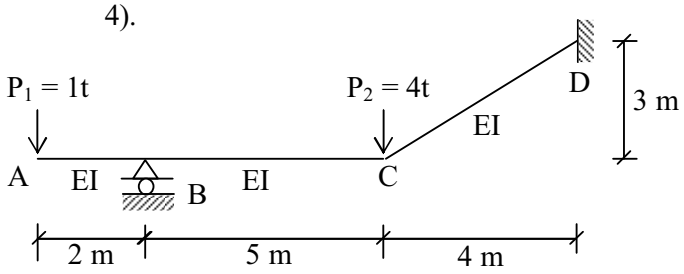


Suatu balok statis tidak tertentu dengan ukuran dan pembebanan seperti tergambar. B dan C perletakan rol sedangkan A perletakan jepit.

Ditanyakan :

- Hitung reaksi-reaksi perletakan pada struktur tersebut dengan metoda *"Consistent Deformation"*.
- Gambarkan bidang M, D dan N nya.

4).



Suatu balok tangga statis tidak tertentu dengan ukuran dan pembebanan seperti tergambar.
B perletakan rol dan
D perletakan jepit

<u>Ditanyakan</u> :

- Hitung reaksi-reaksi perletakan pada struktur diatas dengan metoda *"Consistent Deformation"*.
- Gambarkan bidang M, D dan N nya.

2.3.3. Rangkuman

- Deformasi suatu titik pada sebuah struktur balok dan portal bisa berupa defleksi vertical (Δ_V), defleksi horizontal (Δ_H) atau rotasi (θ).
- Deformasi dari sebuah perletakan adalah,

  Perletakan jepit : $\Delta_v = 0$; $\Delta_H = 0$; $\theta = 0$

  Perletakan sendi : $\Delta_v = 0$; $\Delta_H = 0$

  Perletakan rol : defleksi $\perp$ bidang perletakan rol = 0
- Persamaan *"Consistent Deformation"* adalah persamaan yang menyatakan deformasi suatu titik harus sesuai dengan kondisi fisik struktur asli.
- Jumlah persamaan *"Consistent Deformation"* yang disusun sejumlah gaya kelebihan yang ada.
- Gaya kelebihan yang ada sama dengan jumlah tingkat ke statis tidak tentuan suatu struktur.

2.3.4. Penutup

Untuk mengukur prestasi, mahasiswa dapat melihat kunci dari soal-soal latihan yang ada sebagai berikut :

Soal no. 1

Keterangan	Titik	Nilai	Arah / Tanda
Reaksi Perletakan	A : H_A	0	
	V_A	2,75 ton	↑
	M_A	2,50 ton	
	B : V_B	6,25 ton	↑
Gaya Normal (N)		0	
Gaya Lintang (D)	A : D_A	2,75 ton	
	X_1 = 2,75 m dari A	0	+
	B : D_{BKr}	3,25 ton	-
	D_{BKn}	3 ton	+
	C : D_C	1 ton	+
Momen (M)	A : M_A	2,5 ton	-
	X_1 = 2,75 m dari A	1,28125 ton	+
	B : M_B	4 ton	-
	C : M_C	0	

Soal no. 2

Keterangan	Titik	Nilai	Arah / Tanda
Reaksi Perletakan	A : H_A	$\frac{16}{7}$ t	(↑)
	V_A	$\frac{3}{7}$ t	(→)
	M_A	$\frac{4}{7}$ t	

Keterangan	Titik	Nilai	Arah / Tanda
	C : V_C	$\frac{12}{7}$ t	(↑)
	H_C	$\frac{3}{7}$ t	(←)
Gaya Normal (N)	A : N_{AB}	$\frac{16}{7}$ t	-
	B : N_{BC}	$\frac{3}{7}$ t	-
Gaya Lintang (D)	A : D_A	$\frac{3}{7}$ t	-
	B : D_{Bbw}	$\frac{3}{7}$ t	-
	D_{BKn}	$\frac{16}{7}$ t	+
	C : D_C	$\frac{12}{7}$ t	-
	$X_2 = \frac{12}{7}$ m dari C	0	
Momen (M)	A : M_A	$\frac{4}{7}$ tm	+
	B : M_B	$\frac{8}{7}$ tm	-
	$X_1 = \frac{12}{7}$ m dari C	$\frac{72}{49}$ tm	+

Soal no. 3

Keterangan	Titik	Nilai	Arah / Tanda
Reaksi Perletakan	B : V_B	5,5 t	↑
	C : V_C	4,5 t	↑
	D : M_A	0	
	V_D	1,5 t	↑
	M_D	3 tm	↷
Gaya Normal (N)		0	
Gaya Lintang (D)	A : D_A	0,5 t	-
	B : D_{BKr}	2,5 t	-
	D_{BKn}	3 t	+
	X = 3 m dari B	0	
	C : D_{CKr}	3 t	-
	D_{CKn}	1,5 t	+
	P_2 : D_{P2Kr}	1,5 t	+
	D_{P2Kn}	1,5 t	-
	D : D_D	1,5 t	-
Momen (M)	B : M_B	3 tm	-
	X = 3 m dari B	1,5 tm	+
	C : M_C	3 tm	-
	D : M_D	3 tm	-

Soal no. 4

Keterangan	Titik	Nilai	Arah / Tanda
Reaksi Perletakan	B : V_B	2,369 t	↑
	D : H_D	0	
	V_D	2,631 t	↑
	M_D	5,676 tm	
Gaya Normal (N)	B : N_{BC}	0	
	C : N_{CD}	1,579 t	+
Gaya Lintang (D)	A : D_A	1 t	-
	B : D_{BKr}	1 t	-
	D_{BKn}	1,369 t	+
	C : D_{CKr}	1,369 t	+
	D_{CKn}	2,105 t	-
	D : D_D	2,105 t	-
Momen (M)	B : M_B	2 tm	-
	C M_C	4,847 tm	+
	D : M_D	5,676 tm	-

2.3.5. Daftar Pustaka

1. Chu Kia Wang, "*Statically Indeterminate Stuctures*", Mc Graw-Hill, Book Company, INC.
2. Kinney, J.S. *"Indeterminate Structural Analysis"*, Addison-Wesley Publishing Co.

2.3.6. Senarai

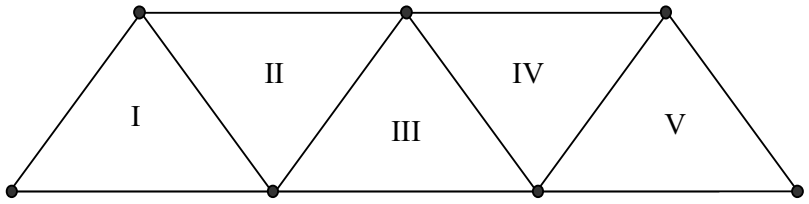
- Metoda *"Consistent Deformation"* untuk penyelesaian suatu struktur statis tidak tertentu yaitu membuat struktur menjadi statis tertentu dengan menghilangkan gaya kelebihan yang ada.
- Deformasi dari struktur statis tertentu akibat beban yang ada dan gaya-gaya kelebihan yang dikerjakan sebagai beban haruslah sesuai dengan kondisi fisik struktur aslinya yaitu struktur statis tidak tertentu.

2.4. Penyelesaian Struktur " Konstruksi Rangka Batang " statis tidak tertentu dengan metode " Consisten Deformation".

Seperti juga pada struktur balok dan portal, struktur "KRB" statis tidak tertentu adalah struktur yang tidak bisa diselesaikan hanya dengan tiga persamaan keseimbangan. Untuk statis tidak tentu luar, berarti jumlah reaksi perletakannya lebih banyak dari tiga, sehingga kelebihan reaksi perletakan. Sedangkan untuk statis tak tentu dalam, berarti kelebihan gaya dalam. Untuk struktur "KRB", setiap batang hanya mempunyai gaya normal (N), sehingga kalau kelebihan gaya batang berarti juga kelebihan jumlah batang.

Untuk menentukan apakah sebuah "KRB" kelebihan gaya batang atau tidak, dapat dirumuskan dengan konsep seperti berikut :

Suatu "KRB" disusun oleh bentuk segitiga-segitiga yang menjamin kestabilan struktur "KRB" tersebut.



Gambar 2.13. Bentuk umum "KRB"

Perhatikan bentuk umum "KRB" seperti gambar 2.13, segitiga I disusun dari tiga titik simpul dan tiga batang. Segitiga II disusun dari 1 titik simpul dan 2 batang , demikian seterusnya untuk segitiga-segitiga berikutnya disusun dari 1 titik simpul dan 2 batang.

Kalau jumlah titik simpul dari suatu "KRB" dan *m* jumlah batangnya, maka akan didapat hubungan antara jumlah titik simpul dan jumlah batang pada sebuah "KRB". Jumlah batang selain dari segitiga awal sama dengan dua kali jumlah titik simpul bukan dari segitiga awal. Hubunga tersebut dapat ditulis menjadi persamaan sbb :

$$(m\text{-}3) = 2(j\text{-}3)$$

$$m = 2j\text{-}3$$

Jadi untuk sebuah struktur “KRB” harus dipenuhi jumlah batang (*m*) sama dengan dua kali jumlah titik simpulnya dikurangi 3 (tiga).

Untuk “KRB” dengan :

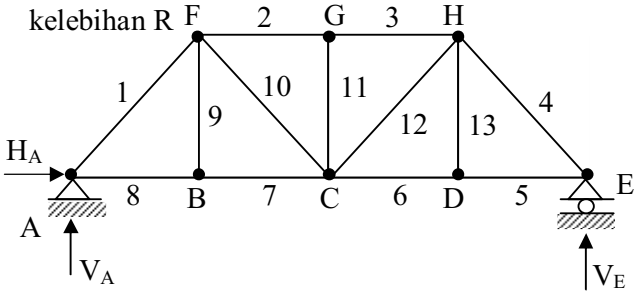
m< 2*j*-3 “KRB“ tidak stabil.

m >2*j*-3 “KRB” Kelebihan jumlah batang.

Jadi struktur “KRB” statis tidak tentu dalam, apabila jumlah batang lebih besar dari dua kali jumlah titik simpul dikurangi dengan tiga.

Contoh menentukan struktur “KRB” statis tidak tertentu :

1).



R=3 → tidak kelebihan R

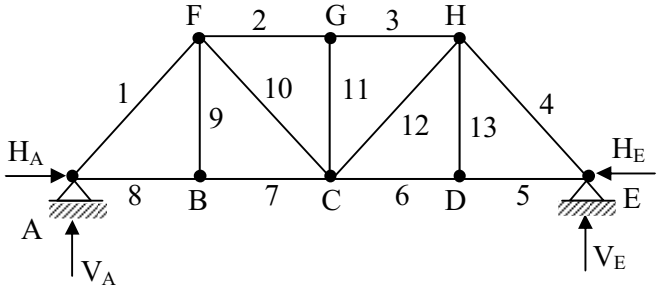
m=13 } *m* = 2*j*-3

j = 8 } 13= 2x8-3

13=13

Tidak kelebihan batang “KRB” statis tertentu

2).



R=4 > 3 kelebihan 1R

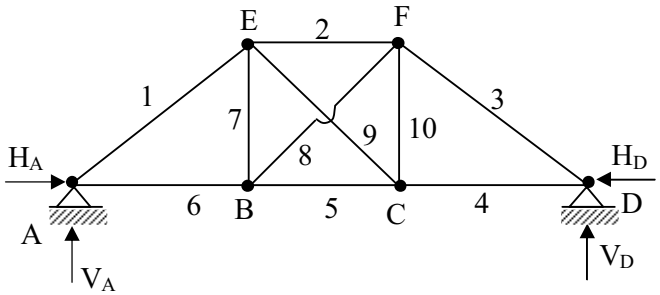
m=13 } *m* = 2*j*-3

j=8 } 13= 2x8-3

13=13

Tidak kelebihan batang “KRB“ statis tidak tertentu tingkat 1 (luar)

3).



R=4 > 3 kelebihan 1R

m=10 } 10>2x6-3

j=6 } 10>9

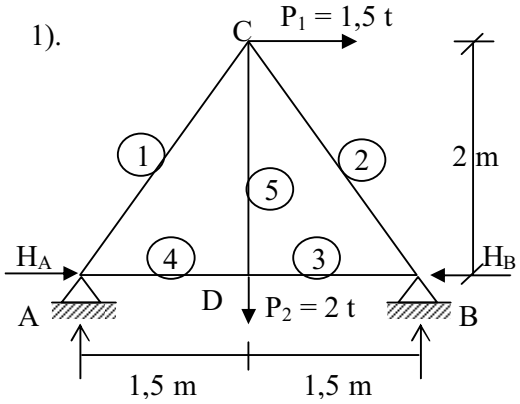
m > 2*j*-3

kelebihan satu batang “KRB“ statis tidak tertentu tingkat 2 (1 luar, 1 dalam)

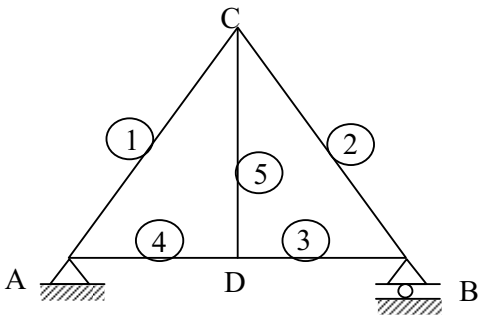
Langkah-langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan struktur “KRB” statis tidak tertentu dengan metoda “ Consistent Deformation “ sama dengan untuk struktur balok dan kolom.

2.4.1. Contoh- contoh penyelesaian

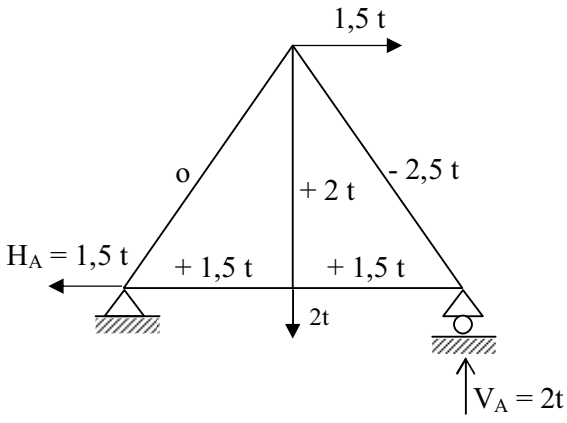
1).



(a). “KRB” Statis tidak tertentu



(b). “KRB” Statis tidak tertentu



(c). Gaya batang akibat beban yang ada (S)

Suatu struktur “KRB” dengan ukuran dan beban seperti tergambar A dan E sama untuk semua batang , A dan B perletakan sendi. Hitung reaksi perletakan dan gaya batangnya dengan metode “ Consistent Deformation“.

Penyelesaian :

R = 4 > 3 ⇒ kelebihan 1R

m = 5 } $m = 2j - 3$

j = 4 } $5 = 2 \times 4 - 3$

$5 = 5$ O.K

“KRB” statis tidak tertentu tingkat 1 (luar)

H_B – Sebagai gaya kelebihan.

ΔH_B – Defleksi yang dihitung.

Defleksi dihitung dengan metoda “ Unit Load “.

$$\Delta = \sum \frac{S.\mu.L}{A.E}$$

Akibat beban yang ada :

$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 1{,}5$ t (←).

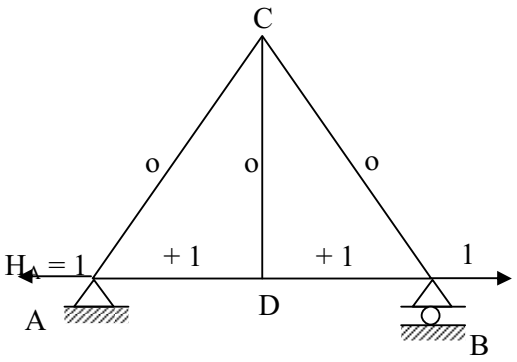
$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A .3 + 1{,}5.2 - 2.1{,}5 = 0$

$V_A = 0$

$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 2 = 0$

$V_B = 2$ t (↑).

Dengan keseimbangan titik simpul didapatkan Besarnya gaya-gaya batang.



Akibat beban unit di B horizontal (→)

(Akibat $H_B = 1$ t →).

$\sum H = 0 \rightarrow H_A = 1$ (←).

$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A .3 = 0$, $V_A = 0$

$\sum V = 0 \rightarrow V_A + V_B = 0$, $V_B = 0$

Dengan keseimbangan titik simpul didapat gaya – gaya batangnya.

(d). Gaya batang akibat beban unit (Akibat $H_B = 1$t →) (μ)

Menghitung defleksi akibat beban yang ada dan akibat beban H_B 1t.

Tabel Perhitungan Defleksi

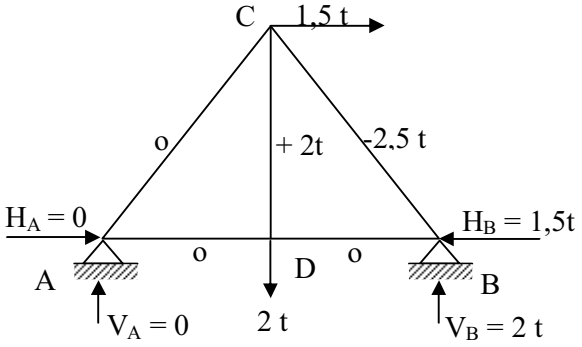
No. Batang	L / AE	S (t)	μ	S μ L/AE	μ^2L/AE	S* = S + μ HB (t)
1	2,5 /AE	0	0	0	0	0 + 0 = 0
2	2,5 /AE	-2.5	0	0	0	-2,5 + 0 = 0
3	1,5 / AE	+ 1,5	+ 1	+ 2,25 /AE	+ 1,5/AE	+ 1,5 + 1 (-1,5) = 0
4	1,5 /AE	+ 1,5	+ 1	+ 2,25 /AE	+ 1,5/AE	+ 1,5 + 1 (-1,5) = 0
5	1,5 /AE	+ 2	0	0		+ 2 + 0 = + 2
			Σ	+ 4,5 / AE	+ 3/AE	

Akibat beban yang ada , $\Delta HB = \Sigma_{i=1}^{5} \frac{S.\mu.L}{A.E} = \frac{4,5}{AE}$ (→)

Akibat beban $H_B = 1$ t (←) , $\delta_{BH} = \Sigma_{i=1}^{5} \frac{\mu^2.L}{A.E} = \frac{3}{AE}$ (→)

Struktur Asli B adalah sendi → $\Sigma \Delta_{BH} = 0$

Persamaan " Consistent Deformation " : $\Delta_{BH} + \delta_{BH} H_B = 0$



$\frac{4,5}{AE} + \frac{3}{AE} H_B = 0$

$H_B = -1,5$ t (←)

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A + H_B - 1,5 = 0$

$H_A + 1,5 - 1,5 = 0 \rightarrow H_A = 0$

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A.3 = 1,5.2 - 2.1,5 = 0$

$V_A = 0$

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_B - 2 = 0$

$V_B = 2$ t (↑).

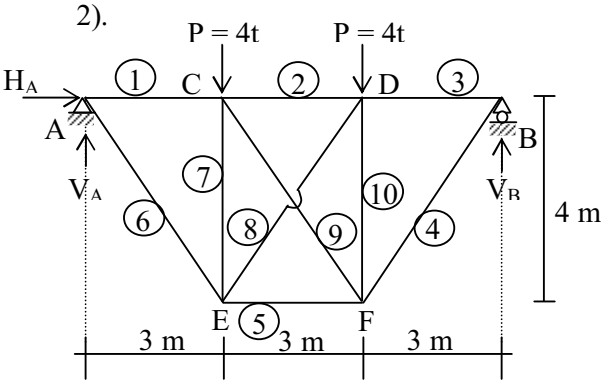
(e). Gaya batang pada struktur statis tidak tertentu

Gambar 2.14. Contoh KRB statis tidak tertentu luar

Dengan keseimbangan titik simpul gaya-gaya batang didapatkan.

Catatan : Gaya-gaya batang pada " KRB " statis tidak tertentu dapat dihitung dengan menjumlahkan gaya-gaya batang pada " KRB " statis tertentu akibat beban yang ada dan akibat H_B .

2).



(a). "KRB" statis tidak tertentu

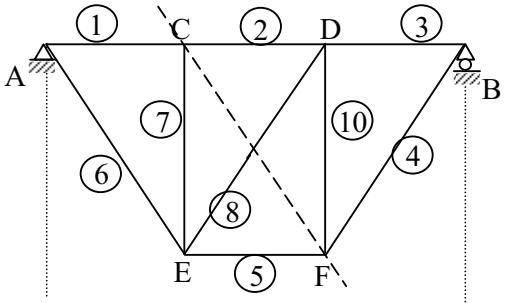
Suatu " KRB " dengan ukuran dan beban seperti pada gambar :

A = Perletakan sendi.

B = Perletakan Engsel.

Besaran A dan E sama untuk semua batang.

Hitunglah reaksi perletakan dan gaya-gaya batangnya dengan metoda "*Consistent Deformation"*



(b). " KRB " Statis Tertentu

Penyelesaian :

* R = 3 ⟶ tidak kelebihan R

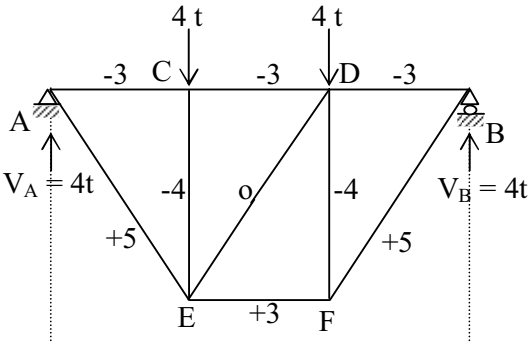
m = 10 } m > 2 j - 3

j = 6 } 10 > 9 kelebihan 1 batang.

KRB " Statis tidak tertentu tingkat 1 (dalam.)

S_9 – sbg gaya kelebihan.

Δ_{CF} – defleksi yang dicari (perpindahan relatif titik C dan F).



(c). Gaya batang akibat beban (S)

* Akibat beban yang ada :

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 0.$

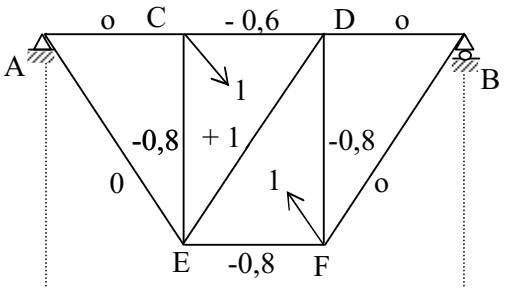
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A.9 - 4.6 - 4.3 = 0$

$V_A = 4\ t\ (\uparrow).$

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_B - 4 - 4 = 0$

$V_B = 4\ t\ (\uparrow).$

Dengan keseimbangan titik simpul gaya – gaya batang didapat :



(d). Gaya batang akibat beban unit (akibat S_g = 1 t, tarik) (μ)

Akibat Beban unit searah batang 9 (arah CF)

(akibat S_9 = 1 t, tarik).

$\Sigma H = 0 \rightarrow H_A = 0.$

$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A.9 + 0 = 0$

$V_A = 0$

$\Sigma V = 0 \rightarrow V_A + V_B = 0$

$V_B = 0$

Dengan keseimbangan titik simpul gaya-gaya batang didapat

Menghitung Δ_{CF} (perpindahan relatif titik C dan F) akibat beban yang ada dan S_9 = 1 t (tarik)

Tabel Perhitungan Defleksi

No. Batang	L / AE	S (t)	μ	S μ L/AE	μ²L/AE	S* = S + μ HB (t)
1	3 /AE	-3	0	0	0	- 3 + 0 = - 3
2	3 /AE	-3	-0,6	+5,4 /AE	+ 1,08 /AE	- 3 + 0 (-1,481) = -2111
3	3 /AE	-3	0	0	0	3 + 0 = -3
4	5 /AE	+5	0	0	0	+ 5 + 0 = + 5
5	3 /AE	+3	-0,6	-5,4 /AE	+ 1,08 /AE	+ 3 - 0,6 (-1,481) = + 3,889
6	5 /AE	+5	0	0	0	+ 5 + 0 = + 5
7	4 /AE	-4	-0,8	+12,8 /AE	+2,56/AE	-4 - 0,8 (-1,481) = -2,815
8	5 /AE	0	+1	0	0	0 + 1 (-1,481) = -1,481
9	5 /AE	-	-	-	-	-1481
10	4 /AE	-4	-0,8	+12,8 /AE	+2,56/AE	-4 - 0,8 (-1,481) = -2,815
			Σ	+ 25,6 / AE	+ 12,28 / AE	

Akibat beban yang ada : $\Delta_{CF} = \Sigma_{i=1}^{10} \frac{S\mu L}{AE} = + \frac{25,6}{A.E}$ (mendekat)

Akibat S_9 = 1 t (tarik) : $\delta_{CF} = \Sigma_{i=1}^{10} \frac{\mu^2.L}{A.E} = + \frac{12,28}{A.E}$ (mendekat)

Struktur aslinya titik C dan titik F dihubungkan oleh batang 9, perpindahan relatif titik C dan F sama dengan perubahan panjang batang 9 (Δ_{L9}).

$$\Delta_{L9} = \frac{S_9 . L_9}{(A.E)_9}$$

Persamaan " Consistent Deformation " $\Sigma \Delta_{CF} = \Delta_{L9}$

$$\Delta_{CF} + \delta_{CF} S_9 = \Delta_{L9}$$

Catatan : kalau batang S_9 tarik , maka Δ_{L9} memanjang, perpindahan relatif titk C dan F menjauh .

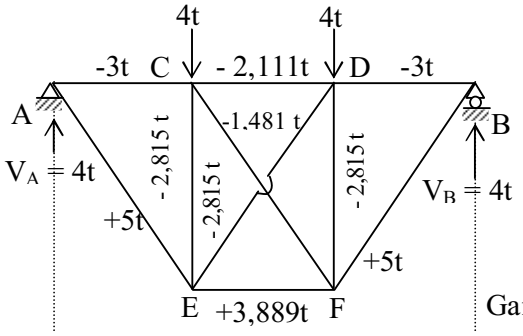
Sehingga persamaan " Consistent Deformation " dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{25,6}{A.E} \quad \frac{12,28}{A.E} S_9 = \frac{5}{A.E} S_9 \quad \square \quad S_9 = -1,481 \text{ t (tekan)}$$

Gaya-gaya batang untuk " KRB " statis tidak tertentu dihitung dengan rumus :

$$S^* = S + \mu \; S_9$$

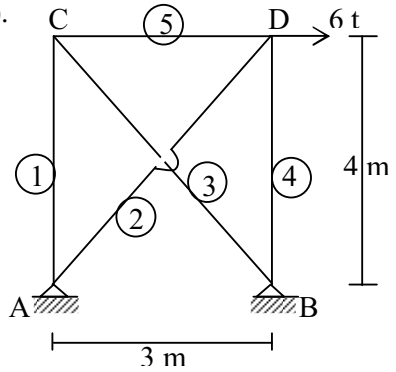
Reaksi perletakan untuk " KRB " statis tidak tertentu sama dengan reaksi " KRB " statis tertentu akibat beban ditambah dengan reaksi perletakan akibat S_9.



Gambar 2.15. Contoh KRB statis tidak tertentu dalam (e) Gaya Batang pada struktur statis tidak tertentu

2.4.2. Soal latihan

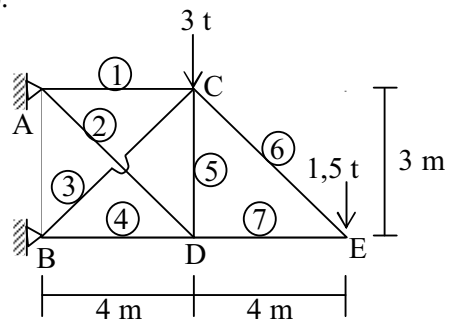
1).



Struktur " KRB " dengan ukuran dan pembebanan seperti tergambar. A dan B perletakan sendi . Besaran A dan E untuk semua batang adalah sama.

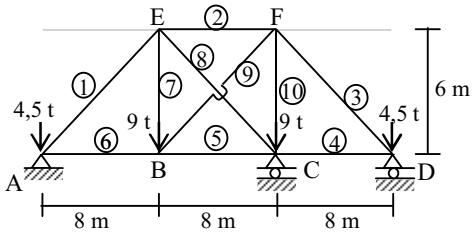
Hitunglah reaksi perletakan dan gaya gaya batangnya dengan metode "Consistent Deformation ".

2).



Suatu “KRB “ dengan ukuran dan pembebanan seperti tergambar , A dan B perletakan sendi. Besaran A dan E untuk semua batang adalah sama.
Hitunglah reaksi perletakan dan gaya gaya batangnya dengan metode “ Consistent Deformation “.

3).



Suatu “KRB “ dengan ukuran dan pembebanan seperti tergambar, A perletakan sendi , C dan D perletakan rol Luas penampang batang-batangnya adalah sebagai berikut :
$A_1 = A_8 = A_9 = A_3 = 50\ cm^2$
$A_2 = A_4 = A_5 = A_6 = 40\ cm^2$
$A_7 = A_{10} = 30\ cm^2$

Sedangakan besaran E sama untuksemua batang, $E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$.
Hitunglah reaksi perletakan dan gaya-gaya batangnya dengan metoda “Consistent Deformation“ .

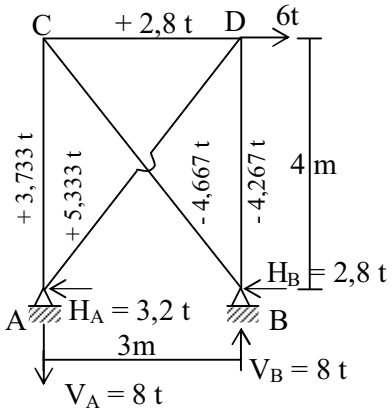
2.4.3. Rangkuman.

- Pada struktur “ KRB “ yang dimaksud deformasi adalah hanya deformasi translasi (perpindahan) titik simpul dan perletakan.
- Perpindahan relatif antara dua titik simpul yang dihubungkan oleh sebuah batang sama dengan perubahan panjang batang tersebut
- Apabila batang tersebut menerima beban tarik , akan bertambah panjang , sehingga perpindahan relatif titik simpul yang dihubungkan oleh batang tersebut akan saling menjauh.
- Apabila batang tersebut menerima beban tekan akan bertambah pendek, sehingga perpindahan relatif titiksimpul yang dihubungkan oleh batang tersebut akan saling mendekat.

2.4.4. Penutup

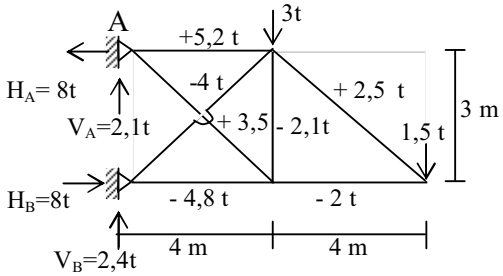
Untuk mengukur prestasi , mahasiswa dapat melihat kunci dari soal-soal latihan yang ada sebagai berikut :

Soal no 1 :



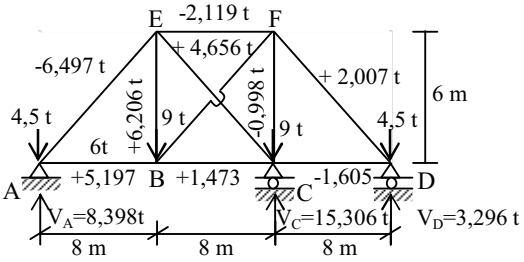
Gaya-gaya batang dan reaksi perletakan pada " KRB " statis tidak tertentu.

Soal no 2 :



Gaya-gaya batang dan reaksi perletakan pada " KRB " statis tidak tertentu.

Soal no 3:



Gaya-gaya batang dan reaksi perletakan pada " KRB " statis tidak tertentu.

2.4.5. Daftar Pustaka

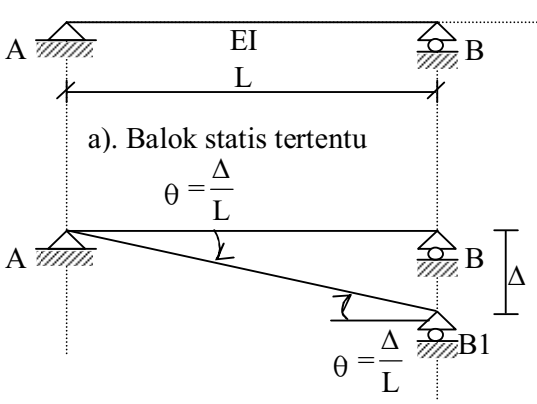
1. Chu Kia Wang, *"Statically Inderteminate Structure"*, Mc Graw-Hill, Book Company, Inc.
2. Kinney, J.S. *"Indeterminate Structural Analysis"*, Addison-Wesley Publishing Co.

2.4.6. Senarai

- Metoda *"Consistent Deformation"* untuk penyelesaian suatu struktur "KRB" statis tidak tertentu yaitu membuat "KRB" tersebut menjadi struktur statis tertentu dengan menghilangkan gaya kelebihan yang ada.
- Defleksi dari struktur "KRB" statis tertentu akibat beban yang ada dan akibat gaya kelebihan sebagai beban haruslah sesuai dengan kondisi fisik dari struktur aslinya, yaitu "KRB" statis tidak tertentu tersebut.

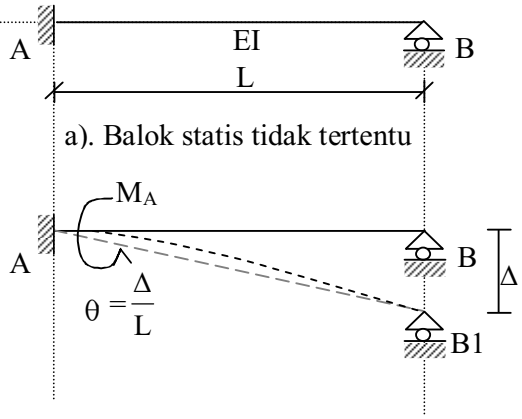
2.5. Penyelesaian Struktur Statis Tidak Tertentu Akibat Penurunan Perletakan dengan Metoda "*Consistent Deformation*".

Berbeda dengan strukur yang statis tertentu apabila terjadi perbedaan penurunan perletakan akan menimbulkan gaya-gaya dalam pada struktur statis tidak tertentu. Sebagai contoh apabila balok diatas dua tumpuan sederhana (balok statis tertentu) perletakan B turun sebesar Δ terhadap perletakan A (Gambar 2.16) maka balok tersebut akan berotasi pada titik A dan B sebesar $\frac{\Delta}{L}$. Karena perletakan A adalah sendi dan perletakan B adalah rol, sehingga bisa menerima rotasi yang terjadi. Balok tidak menerima gaya dalam akibat penurunan perletakan B tersebut. Sedangkan kalau balok statis tidak tertentu, dimana A perletakan jepit dan B perletakan rol (Gambar 2.17), apabila terjadi penurunan perletakan B terhadap perletakan A sebesar Δ, akan terjadi rotasi sebesar $\frac{\Delta}{L}$ pada titik A dan B. Karena perletakan A adalah jepit, maka rotasinya haruslah sama dengan nol ($\theta_A = 0$), sehingga akan terjadi gaya dalam berupa momen di A untuk mengembalikan rotasi di A menjadi nol.



b). Akibat B turun sebesar Δ

Gambar 2.16

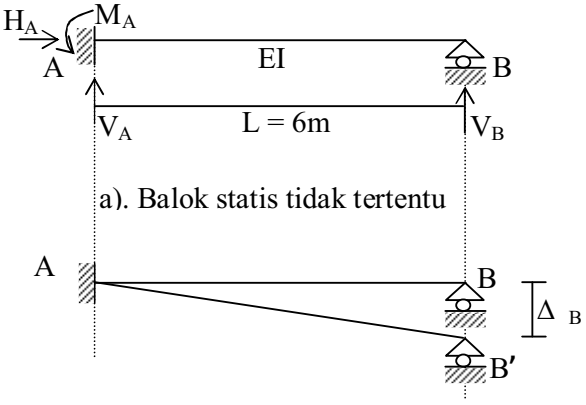


b). Akibat B turun sebesar Δ

Gambar 2.17

Untuk menyelesaikan struktur statis tidak tertentu akibat penurunan perletakan dengan metoda *"Consistent Deformation"* konsep dasarnya sama dengan akibat pembebanan. Hanya saja karena disini tidak ada pembebanan, maka perhitungan deformasi akibat beban tidak ada. Deformasi yang dihitung hanya akibat gaya-gaya kelebihan yang dikerjakan sebagai beban. Penyusunan persamaan *"Consistent Deformation"* nya, dengan melihat kejadian yang timbul pada struktur aslinya. Untuk memilih gaya kelebihan yang dihilangkan sebaiknya disesuaikan dengan kejadian yang timbul pada struktur aslinya, misalnya terjadi penurunan diperletakan A, maka gaya kelebihan yang dihilangkan adalah reaksi vertikal perletakan A (R_{AV}).

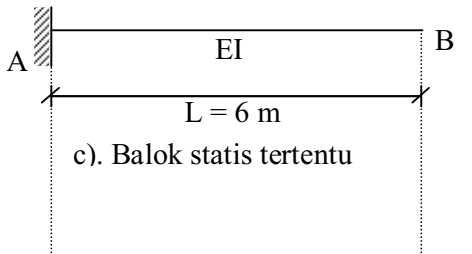
2.5.1. Contoh penyelesaian Akibat penurunan Perletakan



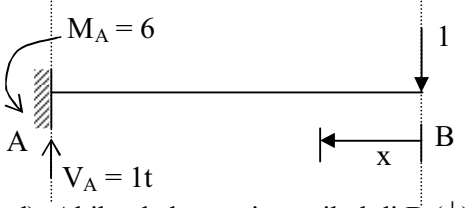
a). Balok statis tidak tertentu

b). Perletakan B turun Δ_B = 2 cm

Sebuah balok statis tidak tertentu dengan perletakan A jepit dan B rol seperti pada Gambar 2.18.
Bentangan balok L = 6,00 m.
Balok dari bahan beton dengan ukuran 40 x 60 cm, E beton = 2 x 10^5 kg/cm².
Kalau terjadi penurunan perletakan B sebesar Δ_B = 2 cm, hitung reaksi perletakan dan gaya-gaya dalam balok tersebut dengan metoda *"Consistent Deformation"*.



c). Balok statis tertentu



d). Akibat beban unit vertikal di B (↓)
(akibat VB = 15 ↓)
$\overrightarrow{BA}$ $0 \le x \le 6$ m ⇒ $m_x = -x$

R = 4 > 3, kelebihan 1 reaksi :

V_B – sebagai gaya kelebihan
Δ_{BV} – defleksi yang dicari

Balok Beton 40 / 60
Ix = 1/12 (40) 60^3 = 720.000 cm^4
E = 2 x 10^5 kg/cm²
EI = 2 x 10^5 x 720.000 = 144 x 10^9 kg cm²
= 14.400 tm²

Akibat beban unit di B vertikal
(akibat V_B = 1t) (↓)
V_A = 1t (↑)
M_A = 1 x 6 = 6 tm

$$\delta_{BV} = \int \frac{mx^2}{EI} dx = \int_0^6 \frac{(-x)^2}{EI} x$$

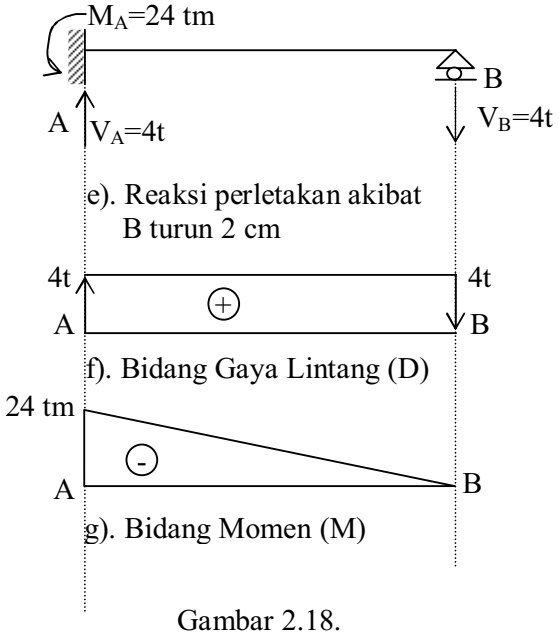
$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^6 = +\frac{72}{EI} \quad (\downarrow)$$

Struktur aslinya perletakan, B turun 2 cm $\Delta_B = 0{,}02$ m

Persamaan *"Consistent Deformation"* : $\Sigma\ \Delta_B = 0{,}02$ m.

$$\frac{72}{EI} V_B = 0{,}02$$

$$VB = 0{,}02 \text{ x } \frac{EI}{72} = 0{,}02 \text{ x } \frac{14400}{72} = +\ 4t \ (\downarrow)$$



e). Reaksi perletakan akibat B turun 2 cm

f). Bidang Gaya Lintang (D)

g). Bidang Momen (M)

Gambar 2.18.

$\Sigma_V = 0$ $V_A + V_B = 0$

$V_A = 4t\ (\uparrow)$

$\Sigma_H = 0$ $H_A = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad M_A - V_B \text{ x } 6 = 0$

$M_A = 4 \text{ x } 6 = 24$ tm

Bidang N N = 0

Bidang D :

$\overrightarrow{AB} = 0 \leq x \leq 6$ m

$Dx = +\ 4t$ $D_A = 4t$

$D_B = 4t$

Bidang M :

$\overrightarrow{AB} = 0 \leq x \leq 6$ m

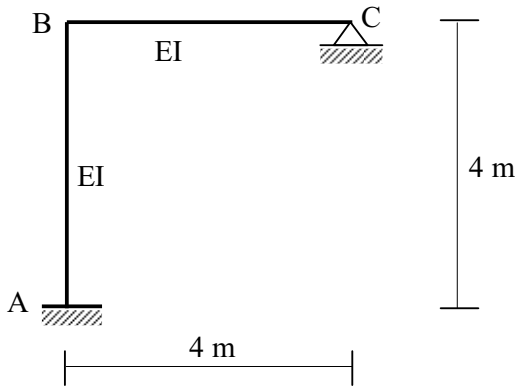
$Mx = V_A \,.\, x - M_A = 4x - 24$

$M_A = -\ 24$ tm

$M_B = 4 \text{ x } 6 - 24 = 0$

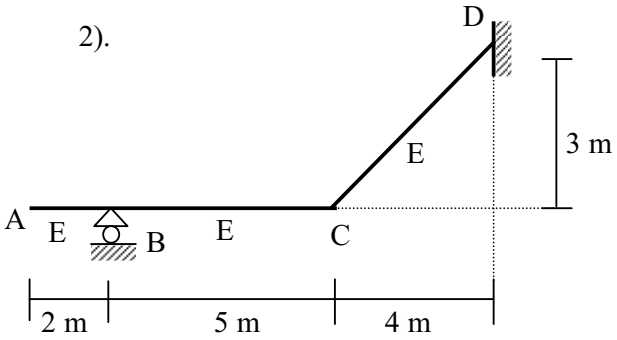
2.5.2. Soal Latihan

1).



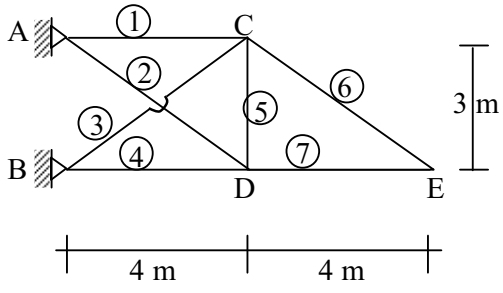
- Suatu portal seperti pada gambar. A perletakan jepit, C perletakan sendi. Kalau balok dan kolom struktur dari beton ukuran 30 / 40 cm dengan E = 2 x 10^5 kg/cm², dan terjadi penurunan di C sebesar 2 cm;
  - Hitunglah reaksi-reaksi perletakannya dengan metoda *"Consistent Deformation"*.

2).



- Suatu balok tangga seperti tergambar. B perletakan rol dan D perletakan jepit. Kalau balok dari beton ukuran 30/50 cm, dengan E = 2 x 10^5 kg/cm², dan terjadi penurunan perletakan B sebesar 2 cm.
  - Hitunglah reaksi-reaksi perletakannya dengan metoda *"Consistent Deformation"*.
  - Gambarlah bidang M, N dan D nya.

3).



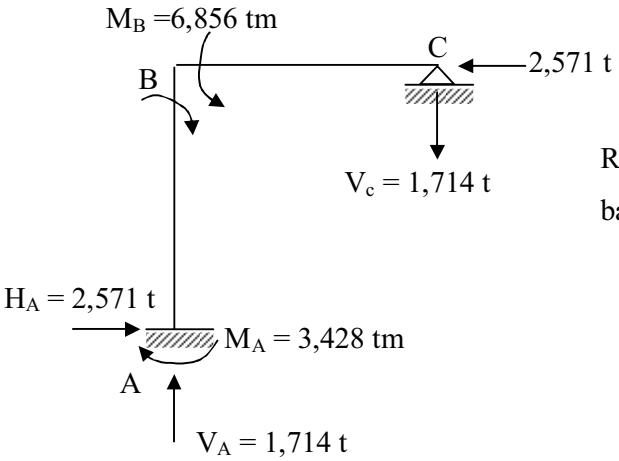
- Suatu struktur "KRB" seperti tergambar. A dan B perletakan sendi. Luas penampang batang semua sama A = 9,6 cm² dengan E = 2 x 10^6 kg/cm².
  Kalau terjadi penurunan di B sebesar 5 cm.
- Hitunglah reaksi-reaksi perletakan dan gaya-gaya batangnya.

2.5.3. Rangkuman

- Pada penyelesaian struktur statis tidak tertentu akibat penurunan perletakan, persamaan *consistent deformation* disusunan dari melihat deformasi akibat gaya kelebihan pada struktur statis tertentu, haruslah sesuai dengan kondisi struktur aslinya, yaitu statits tidak tertentu yang mengalami penurunan perletakan.
- Gaya kelebihan yang dipakai harus disesuaikan dengan terjadinya penurunan pada struktur statis tidak tertentu. Misalnya perletakan A turun yang dipakai sebagai gaya kelebihan adalah reaksi perletakan vertikal di A (R_{AV}), apabila m terjadi perletakan B bergeser kekanan, yang dipakai sebagai gaya kelebihan adalah reaksi horizontal di B (R_{BH}).

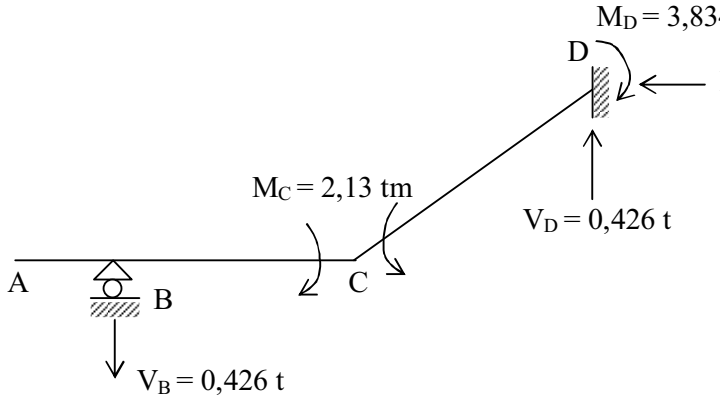
Untuk mengukur prestasi mahasiswa dapat melihat kunci dari soal-soal latihan yang ada sebagai berikut :

Soal No. 1



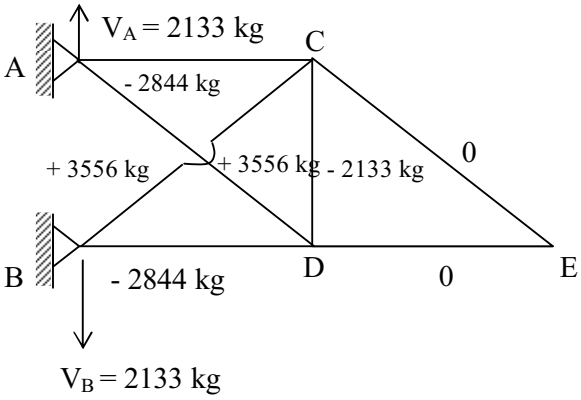
Reaksi perletakan dan momen-momen batang akibat C turun 2 cm.

Soal no. 2



Reaksi perletakan dan momen-momen batang akibat B turun 2 cm.

Soal no. 3



Reaksi perletakan dan gaya-gaya batang akibat perletakan B turun 5 cm

2.5.4. Daftar Pustaka

1. Chu Kia Wang, *"Statically Indeterminate Structures"*, Mc Graw-Hill, Book Company, Inc.
2. Kinney, J.S. *"Indeterminate Structural Analysis"*, Addison-Wesley Publishing Co.

2.5.5. Senarai

- Metoda *"Consistent Deformation"* untuk penyelesaian suatu struktur "KRB" statis tidak tertentu yaitu membuat "KRB" tersebut menjadi struktur statis tertentu dengan menghilangkan gaya kelebihan yang ada.

- Defleksi dari struktur “KRB” statis tertentu akibat beban yang ada dan akibat gaya kelebihan sebagai beban haruslah sesuai dengan kondisi fisik dari struktur aslinya, yaitu “KRB” statis tidak tertentu tersebut.